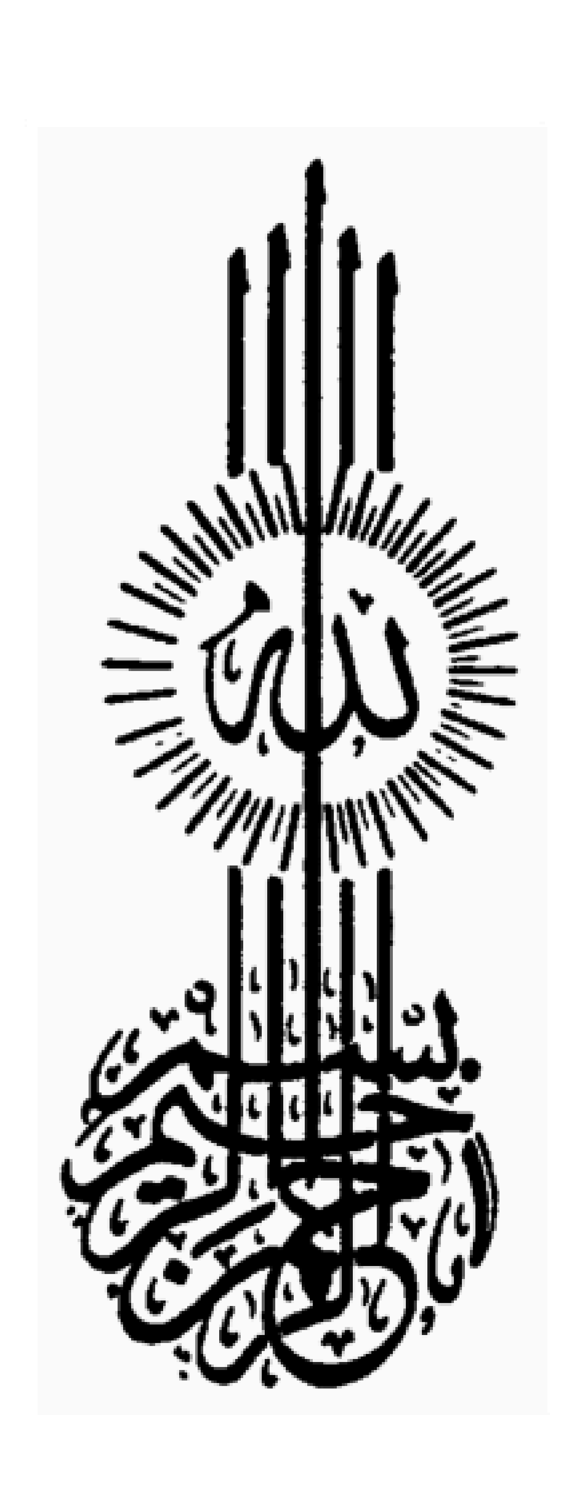


علم الإدارة

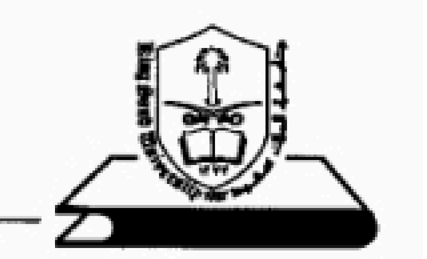
واستخدام الحاسب

تأليف

د. عثمان بن إبراهيم السلوم

قسم نظم المعلومات الإدارية

كلية إدارة الأعمال – جامعة الملك سعود



النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود

ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

السلوم، عثمان بن إبراهيم

علم الإدارة واستخدام الحاسب؛ عثمان بن إبراهيم السلوم. - الرياض، 1431هـ

241 ص ؛ 17سم × 24 سم

ردمك: 6-695- 55 - 9960- 978

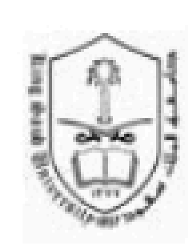
1- نظم المعلومات الإدارية 2- البرمجة (حواسيب) أ. العنوان

ديوي 658.0285 1431/7042

رقم الإيداع: 1431/7042

ردمك: 6-695- 55 - 9960- 978

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة شكلها المجلس العلمي بالجامعة، وقد وافق المجلس العلمي على نشره، بعد اطلاعه على تقارير المحكمين في اجتماعه التاسع عشر للعام الدراسي 1431/1430هـ المعقود بتاريخ 1431/2/9هـ الموافق 2010/1/24م.



النشر العلمي والمطابع 1431هـ

مقدمة المؤلف

الحمد لله الذي علّم بالقلم، علم الإنسان مالم يكن يعلم والقائل في كتابة الكريم: ﴿ قُلْ هَلْ يَسْتَوِي ٱلَّذِينَ يَعْلَمُونَ وَٱلَّذِينَ لَا يَعْلَمُونَ ۗ إِنَّمَا يَتَذَكَّرُ أُوْلُوا۟ ٱلْأَلْبَٰبِ ﴾[1] وصلى الله وسلم على نبينا محمد وعلى آله وصحابته أجمعين والقائل في أهمية طلب العلم **"من سلك طريقا يلتمس فيه علما سهل الله له به طريقا إلى الجنة"**[2].. وبعد:

فيعتبر علم بحوث العمليات (Operations Research) من العلوم الحديثة نسبيا والتي ظهرت أثناء الحرب العالمية الثانية. وكانت الحاجة في ذلك الوقت هي وراء ظهور هذا العلم الحديث نسبياً مقارنة بالعلوم الأخرى. وهذا العلم وإن كان بدأ في المجال العسكري فمع مرور الوقت تبناه قطاع الأعمال والتجارة لأهميته في حلول أغلب مشاكل الإدارة والأعمال. وقد لا نكون مبالغين إذا قلنا إن استخدام هذه الأساليب الكمية الحديثة والاستفادة منها قد تكون هي وراء نجاح أغلب المنشآت التجارية والربحية. وفي هذا الكتاب تم التركيز بشكل أكبر على استخدام الحاسب الآلي في حلول هذه التطبيقات. وهذه الجزئية قد تكون هي من أهم العناصر التي

(1) سورة الزمر، آية: 9.

(2) رواه مسلم.

يقدمها هذا الكتاب للمكتبة العربية في هذا المجال حيث يلاحظ نقصاً واضحاً في استخدام الحاسب الآلي في حل التطبيقات في الكتب العربية المتوفرة بالأسواق.

وقد قسم هذا الكتاب إلى ثلاثة فصول رئيسة هي: البرمجة الخطية، ومشكلة النقل، وأسلوب تقييم البرامج ومراجعتها وطريقة المسار الحرج.

الفصل الأول: البرمجة الخطية (Linear Programming) وسيتم التطرق إلى أقسام هذه الطريقة وكيفية تحويل المشاكل الإدارية وصياغتها في شكل رياضي. ثم يتم التعرف على كيفية حل هذه المشكلة بيانياً وطريقة استخدام جدول السمبلكس المشهور في حل مثل هذه المشاكل.

الفصل الثاني: مشكلة النقل(Transportaion Problem) ويتم التعرف على طريقة الركن الشمالي الغربي وطريقة أقل تكلفة وطريقة فوجل التقريبية. ويتم التفصيل بعض الشيء في تقييم هذه الطرق والوصول إلى أفضل حل في الحالات العادية وفي الحالات الخاصة.

الفصل الثالث: أسلوب تقييم البرامج ومراجعتها (PERT) وطريقة المسار الحرج (CPM). وسيتم التطرق إلى كيفية رسم شبكة بيرت (PERT) وكيفية تحديد الأوقات المبكرة والمتأخرة للانتهاء وكيفية تحديد المسار الحرج.

وفي نهاية كل فصل يوجد تفصيل يوضح كيفية حل هذه التطبيقات والمشاكل الإدارية باستخدام البرامج المشهورة في هذا المجال ومن أهمها برنامج إكسل (Excel) و(Lindo) و(Qsb).

كذلك يشمل الكتاب أيضاً على ملحق بالمصطلحات اللاتينية والعربية مرتبة أبجدياً لتساعد الطالب والباحث في التعرف على معاني هذه المصطلحات. وهذا يساعد الطالب وكذلك الباحث في فهم الكتب والمراجع الأجنبية ويفتح لهم آفاق واسعة للاستفادة من المراجع باللغات الأخرى.

و أخيراً لا يسعني إلا أن أشكر كل الزملاء الذين راجعوا الكتاب قبل طبعه وقدموا لي بعض النصائح التي ساعدت في إخراج هذا الكتاب بأفضل صورة وخاصة أخي الأستاذ الدكتور إبراهيم مخلوف وبقية الزملاء.

هذا وأسأل الله بمنه أن يجعل عملي هذا خالصاً لوجهه، وأن يستفيد به جميع من قرأه، إنه سميع مجيب.

المؤلف

د. عثمان بن إبراهيم السلوم

alsallom@ksu.edu.sa

المحتويات

الفصل الثالث: أسلوب تقييم البرامج ومراجعتها وطريقة المسار الحرج

Program Evaluation and Review Technique

الفصل الأول

البرمجة الخطية
LINEAR PROGRAMMING

مقدمة

علم الإدارة (Management Science) هو باختصار استخدام مجموعة من العلوم المختلفة والأدوات العلمية الحديثة لتحليل ودراسة المشكلات الإدارية (إدارة أعمال، محاسبة، واقتصاد...) والاجتماعية وغيرها وحلول هذه المشاكل بعد تحويلها إلى نماذج كمية.

هذه العلوم هي كالتالي:

1- **علم الإحصاء Statistics**: ويستفيد علم الإدارة من الجانب التطبيقي والاستخدامات المختلفة لعلم الإحصاء تاركاً الجانب النظري (براهين معادلات وغيرها) إلى المتخصصين في الإحصاء.

ومن المواضيع الإحصائية التي يهتم بها الأساليب الكمية هي كالتالي:

- تنظيم البيانات وعرضها.
- مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال.......).
- مقاييس التشتت (المدى، نصف المدى الربيعي، التباين والانحراف المعياري..).
- الارتباط والانحدار.

- الأرقام القياسية.
- السلاسل الزمنية.
- الإحصائيات الحيوية (السكانية).
- الاحتمالات، وغيرها.

2- **علم بحوث العمليات Operations Research**: وهو العلم الذي يبحث في حلول المشاكل الإستراتيجية والتكتيكية المختلفة بهدف التوصل إلى حل استراتيجي أمثل. هذا العلم ظهر في خلال الحرب العالمية الثانية، حيث احتاجه قادة الجيش في كل من بريطانيا وأمريكا إلى التوصل إلى حلول إستراتيجية للمشاكل التي واجهتهم للتغلب على الخصم.

ومن المواضيع المهمة التي يستفيد منها علم الإدارة من بحوث العمليات هي كالتالي:

- البرمجة الرياضية (Mathematical Programming).
- تحليل الشبكات (Network Analysis).
- مشكلة النقل (Transportation Problem).
- نماذج الصفوف (Queuing Models).
- نماذج المخزون (Inventory Models).

3- **علم الرياضيات**: ويهتم علم الإدارة باستخدام بعض المواضيع الرياضية ذات الصلة والمهمة في اتخاذ القرار، مع التركيز على تطبيق الرياضيات على الجوانب الإدارية والاقتصادية وترك الجانب النظري للمتخصصين في قسم الرياضيات.

ومن المواضيع الرياضية التي يتطرق إليها علم الإدارة هي كالتالي:

- الأسس (Powers or Exponentiation).

- اللوغاريتمات (Logarithm).
- التباديل.
- التوافيق.
- نظرية ذات الحدين لأس صحيح موجب.
- النهايات (Limits).
- اتصال (استمرار) الدوال.
- التفاضل (Differentiation).
- الدوال الرياضية (الدالة الآسية- اللوغاريتمية- البارامترية- العكسية).
- النهايات العظمى والصغرى لدالة متغير واحد.
- معادلة الخط المستقيم.
- المعادلات من الدرجة الأولى والثانية.
- المتراجحات (المتباينات).
- المحددات (Determinates).
- المصفوفات (Matrixes).
- المتواليات.
- مجموع قوى الأعداد الطبيعية.
- التكامل (Integration).

4- **علم الحاسب الآلي:** ويهتم علم الإدارة بالتعرف على استخدام الحاسب الآلي والاستفادة منه في التوصل إلى حلول إدارية كمية. ومن التخصصات التي يستخدمها علم الإدارة في مجال الحاسب الآلي هو نظم القرارات المساند (Decision Support System) وكذلك نظم المعلومات الإدارية (MIS) (Management Information System) لتنظيم البيانات الإدارية بهدف تنسيقها

وتصنيفها وتحليلها وتحويلها إلى علاقات ومعلومات مفيدة وحفظها بأسلوب يسهل استرجاعها عند الحاجة.

وكمثال للبرامج الجاهزة التي يستفيد منها علم الإدارة في اتخاذ القرارات هي كالتالي: Excel, SAS, SPSS للتطبيقات الإحصائية وQSB+, Cplex, IP, Lindo لتطبيقات بحوث العمليات، كذلك يجب على المتخصص في علم الإدارة معرفة التطبيقات العامة مثل MS Office وغيرها.

أيضاً فإن الحاجة والتقدم في هذا العقد الأخير أوجبت على المدير ومتخذي القرارات في المنشأة الخاصة والعامة معرفة التعامل مع الإنترنت (Internet) كاستخدام البريد الإلكتروني (Email) واستخدام الشبكة العنكبوتية (WWW) وطريقة تصميم الصفحات التجارية والخاصة بالشركات ونشرها حية على الإنترنت للدعاية وتسويق منتجاتهم وزيادة عملائهم.

البرمجة الرياضية
Mathematical Programming

تنقسم البرمجة الرياضية إلى عده أقسام وهي:

1- البرمجة الخطية (LP) Linear Programming

تعتبر البرمجة الخطية من أهم أساليب البرمجة الرياضية Mathematical Programming وأكثرها تطبيقا في الحياة العملية لضمان الاستخدام الأمثل للموارد في ظل إمكانيات وموارد محدودة. مثل إيجاد المزيج الأمثل من بين المنتجات التي ينتجها مصنع معين لتحقيق أكبر ربح طبقا للمتاح من العمل والمواد الخام. وكذلك مثل نقل منتجات معينة من مناطق إنتاج إلى مراكز استهلاك بحيث تقوم كل منطقة إنتاجية بتوزيع منتجاتها إلى مراكز الاستهلاك بحيث يشبع كل مركز استهلاكي طلبه بأقل

تكلفة ممكنة. وقد كان لاستخدام طريقة السمبلكس The Simplex Method التي طورها دانتزج G. Dantzig عام 1947 م لحل البرنامج الخطي أثراً كبيراً في زيادة وانتشار التطبيقات العملية لهذا الأسلوب وساعد على ذلك الاستعانة بالحاسبات الآلية المتطورة في حله بحيث يمكن حل برنامج يتكون من مئات المتغيرات بسهولة.

ويلاحظ أن البرنامج الخطي يتكون من دالة هدف واحدة وتكون متغيرات القرار فيه مستمرة وجميع صيغه الرياضية خطية كما أن مؤشراته لا يدخل فيها العنصر العشوائي.

2- برمجة الأهداف (GP) Goal Programming

يوجد في هذا النوع من البرمجة أكثر من هدف ويعبر عن كل هدف بقيد في صورة معادلة يعرف بقيد الهدف Goal Constraint يحتوي على متغيرين انحرافيين Deviation Variables ويتم صياغة دالة الهدف في صورة تصغير مجموع متغيرات الانحرافات غير المرغوب فيها، ويمكن تقدير معامل لكل هدف يسمى معامل أولوية Priority Factor يعكس درجة تفضيل متخذ القرار ويمكن تقدير وزن نسبي لكل هدف، ويتم حل برنامج الأهداف باستخدام طريقة السمبلكس وذلك بعد تعديلها حتى تأخذ في الاعتبار معاملات الأولوية.

3- البرمجة الصحيحة (IP) Integer Programming

في كثير من المواقف الإدارية تكون قيم متغيرات القرار أعداداً صحيحة فمثلا عند اختيار التوليفة الأقل تكلفة من الطائرات المطلوب شرائها طبقاً للسعر ووفق الصيانة والطاقة الاستيعابية. فإنه في مثل هذه الحالة ليس من المعقول أن تكون أعداد الطائرات في صورة كسرية. وكذلك عند اختيار التوليفة الأكثر ربحاً من بين المشروعات المطلوب إنشاءها طبقاً للموارد المالية المتاحة فليس من المناسب أن تكون أعداد المشروعات في صورة كسرية. ويمكن التفرقة بين ثلاثة أنواع من البرمجة الصحيحة بحسب نوع متغيرات القرار التي يتضمنها البرنامج.

البرمجة الصحيحة العامةGeneral Integer Programming وهي التي تكـون جميـع متغيرات القرار فيها في صورة صحيحة. والبرمجـة الـصحيحة الثنائيـة Binary Integer Programming وهي التي يمكن أن تكون فيها متغـيرات القـرار إمـا صـفر أو واحـد. والبرمجة الصحيحة المختلطة Mixed Integer Programming والتي تحوي على خليط من المتغيرات ذات الطبيعـة الـصحيحة والكـسرية. ويلاحـظ أن بعـض مواقـف البرمجـة الصحيحة لها هيكل خاص وطرق خاصة بحلها مثـل مـشكلة النقـل Transportation Problem ومشكلة التعيين Assignment Problem و كذلك تـستخدم طـرق معينـة لحـل البرامج الـصحيحة مثـل الـسمبلكس ثـم اسـتخدام طريقـة القطـع Cutting Method وطريقة التفرع والحد Branch And Bound Method. ويعيب هذه الطـرق أنهـا تتطلـب عددا كبيرا من الخطوات وخاصة مع ازدياد عدد متغيرات القرار.

4- البرمجة غير الخطية (NLP) Non-Linear Programming

ويعتبر البرنامج غير خطي إذا تم صياغة علاقة أو أكثر من العلاقات في صورة غير خطية ويمكن حله باستخدام حساب التفاضل للحصول على قيم متغيرات القرار التي تعظم أو تخفض دالة الهدف باستخدام مضاعفات لاغرانج Lagrange Multipliers وذلك إذا كانت القيود الهيكلية في صـورة معـادلات وباسـتخدام شروط كـون تـوكر Khun Tucker ومضاعفات لاغرانج إذا كانت القيود الهيكلية في صورة متباينات.

5- البرمجة التربيعية (QP) Quadratic Programming

وفي مثل هذه البرمجة تكون دالة الهدف في صـورة تربيعيـة والقيـود الهيكليـة في صورة خطية وهي حالة خاصة من البرمجة غير الخطية مثل نماذج اختيار المحافظ التـي تكون فيها دالة الهدف من جزأين: جزء يمثل العائـد المتوقـع مـن المحفظـة في صـورة خطية والجزء الآخر يمثل المخاطرة الـذي يعـبر عنـه بتبـاين قـيم المحفظـة في صـورة

تربيعية. ومن الطرق المستخدمة في الحل في هذه الحالة طريقة السمبلكس لولف Wolfe's Simplex Methods For QP وهي تعتمد على استخدام مضاعفات لاغرانج وشروط كون تكر بالإضافة إلى طريقة السمبلكس.

6- البرمجة العشوائية أو الاحتمالية: Stochastic Programming (SP)

وفي البرمجة العشوائية يتم وصف مؤشر أو أكثر من مؤشرات النموذج باستخدام متغيرات عشوائية –احتمالية–، ومن الطرق المعروفة للحل طريقة البرمجة العشوائية المقيدة Chance Continues Programming حيث تقدر القيم المتوقعة لدالة الهدف ومعاملات متغيرات القرار من القيود الهيكلية أو الطرف الأيمن لها أو كليهما كمتغيرات عشوائية ذات توزيعات احتمالية معينة.

7- البرمجة الديناميكية Dynamic Programming (DP)

وهي عندما يكون المطلوب هو التوصل إلى حلول متعلقة ببعضها البعض وفي فترات متغيرة ومتعاقبة ويكون الغرض من دالة الهدف هو أمثلية هذه الأهداف على الفترات المختلفة بأكملها.

البرمجة الخطية

Linear Programming

طبيعة البرمجة الخطية

يعتبر اتخاذ القرار الأمثل في إدارة الأعمال الحديثة أهم وظيفة للمدير. هذا القرار دائماً يكون عبارة عن اختيار بديل من عدة بدائل للوصول إلى أهداف معينة. هذه الأهداف قد تكون شيئاً يراد تعظيمه أو شيئاً يراد خفضه أو مزيج من الاثنين. ومن الأمثلة على الأشياء التي يراد تعظيمها: تعظيم الأرباح، الدخل، الاستثمار، مستوى خدمة العملاء وغيرها من الأشياء التي في صالح الشركة.ومن الأمثلة على

الأشياء التي يراد تخفيضها: تخفيض الخسائر، الأخطار، الموارد المستخدمة وجميع الأشياء التي في غير صالح المنشأة. لذلك فإن البرمجة الرياضية تهدف إلى معرفة قيم بعض المتغيرات التي تؤدي إلى أمثلية الهدف(أو الأهداف) المطلوب تحقيقها.

ومعظم مشاكل البرامج الخطية يمكن أن تصاغ بالصياغة العامة التالية:

$$(Maximization) \quad or \quad (Minimization) \qquad z = \sum_{j=1}^{n} cj \qquad xj$$

Subject to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \; X_j \qquad \geq\leq \quad b_i \qquad for \qquad i = 1,2,......., \; m$$

$$X_j \geq 0 \quad for \qquad j = 1,2,......., \; n$$

حيث

Z : قيمة دالة الهدف والتي تقيس فعالية أو كفاءة قرار الاختيار.

X_j : المتغيرات التي يراد معرفة قيمتها.

C_j : تكلفة (أو ربح) الوحدة الواحدة من المتغيرات.

a_{ij} : معاملات المتغيرات وتكون عادة معروفة.

b_i : المتاح من الموارد والتي تكون محدودة.

ويلاحظ أن البرنامج الرياضي يتكون من ثلاث عناصر رئيسة وهي

1- متغيرات القرار والمؤشرات Decision variables and parameters

ويمكن تعريف المتغيرات على أنها هي الكميات غير المعروفة التي يحددها الحل وتخضع لإرادة متخذ القرار مثل تحديد الكميات المطلوب إنتاجها من منتجات مختلفة ينتجها المصنع أو تحديد الكميات المطلوب نقلها من المصانع إلى الأسواق. بينما الثوابت أو المؤشرات فيمكن تعريفها بأنها هي الكميات المعروفة الثابتة التي بناء عليها يتم عليها تحديد المتغيرات مثل الكميات المتاحة من كل مورد أو الكمية المستخدمة من

مورد معين لإنتاج وحدة واحدة من منتج ما أو معدل الربح أو تكلفة منتج معين.......إلخ

2- القيود Constraints

وهي تمثل المحددات التي تحصر قيم المتغيرات المجهولة وحصرها في حدود قيم معينة تسمى الحلول الممكنة Feasible Values.

3- دالة الهدف Object function

وهي الدالة التي يتم فيها صياغة الهدف الذي يسعى إليه متخذ القرار حيث يتم التعبير عن فعالية النموذج كدالة في متغيرات القرار وعموما ينتج الحل الأمثل (Optimal Solution) عندما تحقق قيم متغيرات القرار أفضل قيمة لدالة الهدف سواء كان الهدف تعظيم كتعظيم الأرباح أو تقليل كتقليل الخسائر والتكاليف وذلك طبقاً لظروف الموقف التي يعبر عنها بواسطة القيود وتطبيق البرمجة الخطية.

مثال: تقوم شركة الأويسط للأثاث بتصنيع الطاولات والكراسي كجزء من إنتاجها. الجدول التالي يوضح اسم المورد (المواد والعمل) الذي نحتاجه لصنع وحدة واحدة من المنتج وعدد الوحدات المطلوبة والوحدات المتاحة.

اسم المورد	الوحدات المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة		المتاح
	الطاولات	الكراسي	
خشب (ياردة)	15	10	300
عمل (ساعة عمل)	2.5	5	110
ربح الوحدة الواحدة بالريال)	3	4	

ويريد صاحب الشركة أن ينتج العدد اللازم من الكراسي والطاولات لزيادة الربح إلى أكبر قدر ممكن من الريالات.

خطوات الحل

1- صياغة المشكلة رياضياً Formulation

نفترض أن عـدد الطـاولات المطلـوب إنتاجهـا (t) وعـدد الكـراسي المطلـوب إنتاجها (c).

صياغة دالة الهدف Objective function

حيث إن الهدف هو تعظيم الربح إلى أعلى حد ممكن فإن دالـة الهـدف يجـب أن تكون تعظيم (Maximization) واختصارا تكتب (.Max)[1]، وحيث إن الربح هو عبارة عن عدد الوحدات المباعة مضروبا بربح الوحـدة الواحـدة فـإن دالـة الهـدف في هـذه المشكلة تكون كالتالي:

$$\text{Max. } 3t + 4c$$

ويمكن أن يرمز لدالة الهدف برمز وليكن (z) فتكتب أيضا بصوره أخرى كالآتي:

$$\text{Max. } z = 3t + 4c$$

صياغة القيود Constraints

- قيد الخشب: الأخشاب المستخدمة لصنع الطاولات + الأخشاب المستخدمة لصنع الكراسي محددة ويجب أن لا تزيد عن الكمية المتاحة. لذلك فـإن القيـد الخـاص بالكمية المتاحة من الأخشاب يكون كالتالي:

$$15t + 10c \leq 300$$

- قيد العمل: ساعات العمل المستخدمة لصنع للطـاولات + سـاعات العمـل المستخدمة لصنع الكراسي يجب أن لا تتعدى الساعات المتاحة للشركة. أي أن:

$$2.5t + 5c \leq 110$$

- قيد عدم السلبية non-negative constraints : حيث إنه لا يوجد إنتاج كـراسي أو طاولات بالسالب فإنه يجب أن يوضع قيد على الحل أن لا يقل عن الصفر. أي أن:

---

(1) لو افترضنا أن الشركة تريد مثلا (تخفيض) التكاليف أو أي عنصر آخر فإن دالة الهدف تكون دالة تخفيض (Minimization) أو اختصاراً (.Min).

$t , c \geq 0$

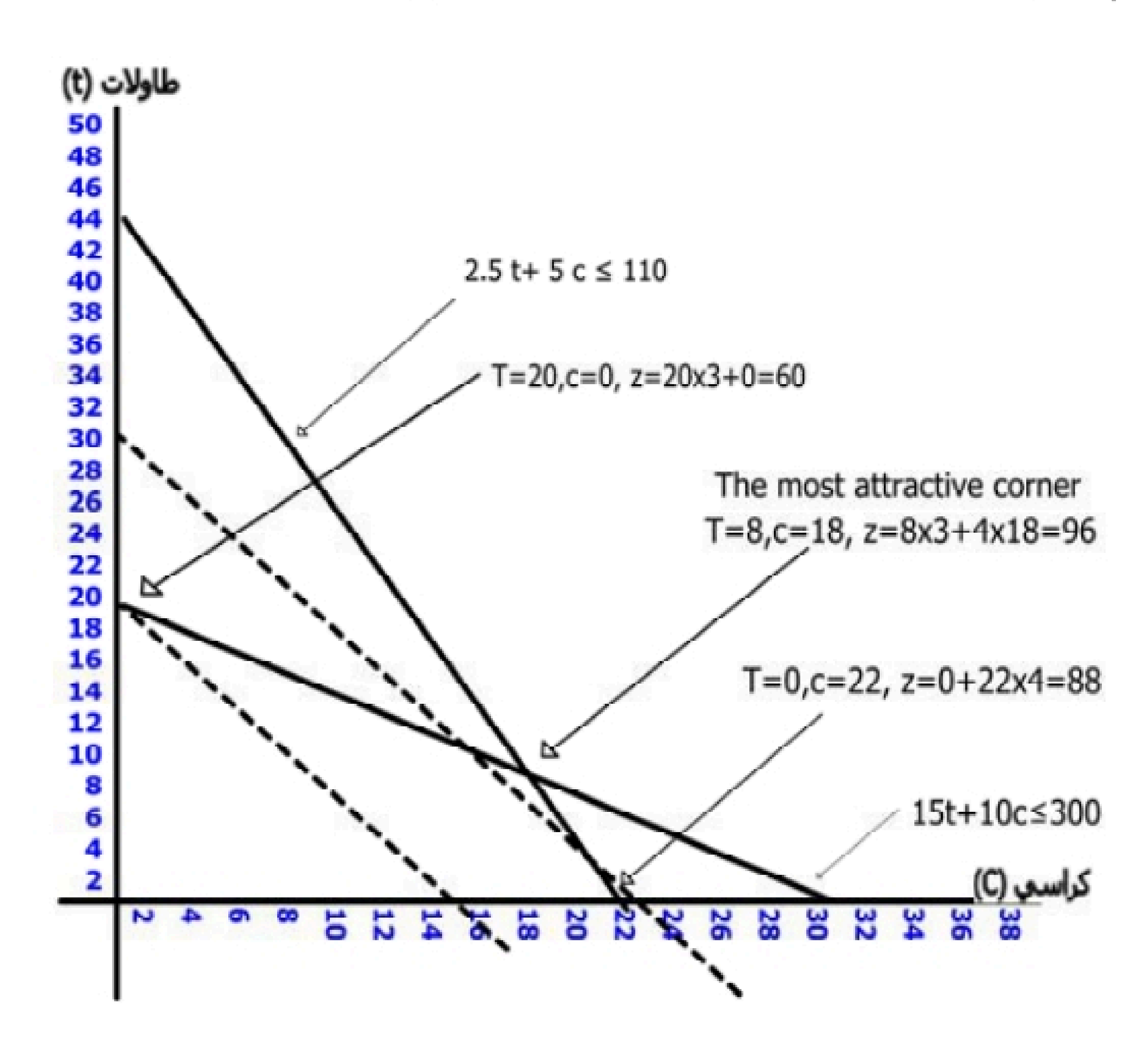
لصياغة المشكلة بالبرمجة الرياضية (البرمجة الخطية) توضع المتغيرات t , c ودالة الهدف والقيود الخاصة بالمشكلة جميعا. لذلك فإن صياغة المشكلة السابقة كاملة هي كالآتي:

Max. $z = 3t + 4c$
subject to
$15t + 10c \leq 300$
$2.5 t + 5c \leq 110$
$t , c \geq 0$

2- طريقة الحل البياني The Graphical Solution Methods

طريقة الحل البيانية هي أسهل من الطرق الأخرى لحل المشكلة ولكن يعيبها أنها مقتصرة على حل المشاكل التي تتكون من متغيرين فقط (مثلا منتجين) كما هو الحال في هذا المثال.

لرسم مجال الحل الممكن (feasible solution): نبدأ الرسم بوضع محورين (خطين) متعامدين. أحد هذه المحاور يمثل عدد الطاولات والآخر يمثل عدد الكراسي. يقسم كل محور إلى وحدات لا تقل عن الحد الأعلى الممكن إنتاجه من كل منتج. ويرسم كل قيد وكذلك دالة الهدف على شكل خط كالآتي:



تحديد أعظم زاوية جذابة The most attractive corner

الشركة تستطيع أن تنتج في أي نقطة داخل منطقة الحلول الممكنة. ولكن هدف صاحب الشركة هو تعظيم الفائدة التي تمثلها المعادلة السابقة ($z=3t+4c$). لذلك فإنه لابد من وضع المعادلة هذه في الرسم البياني للحل. وذلك بوضع أي قيمة ابتدائية وافتراضية لدالة الربح (عادة يوضع قيمة موجبة أكبر من الصفر). افترض أننا وضعنا $z = 24$ حيث إنها تقبل القسمة على كلا من 3 و4 بسهولة وتقع في منطقة الحلول الممكنة. بعد ذلك نضع خط دالة الهدف يقاطع محور الطاولات في 8 ويقاطع محور الكراسي في النقطة 6. ثم نحرك خط دالة الهدف إلى الاتجاه الذي يزيد من الأرباح (عكس نقطة الصفر) وبشكل موازي لخط دالة الهدف المرسوم حتى نصل إلى آخر زاوية في الحلول الممكنة وهذه الزاوية هي زاوية الحل الأمثل وتسمى زاوية أعظم جاذبية (The most attractive corner).

معرفة الحل الأمثل: أعظم زاوية جذابة هي التي تعطينا قيم متغيرات الحل الأمثل. وبالنظر إلى الزاوية المثلى نجد أنها تقاطع محور الكراسي في 18 وتقاطع محور الطاولات في 8. أي إن الحل الأمثل هو إنتاج 8 وحدات من الطاولات و18 وحدة من الكراسي. وأعظم قيمة لدالة الهدف هي $3\times8+4\times18=96$ ريالاً.

معرفة الحل الأمثل بحل القيدين رياضيا: حيث إن الزاوية المثلى تقع في تقاطع القيدين الخاصّين بساعات العمل وكمية الخشب المتاحة فإنه أيضا يمكن معرفة العدد اللازمة من الكراسي والطاولات بحل المعادلتين الخاصتين بهذه القيود التالية:

$15t + 10c \leq 300$ (1)
$2.5\, t + 5\, c \leq 110$ (2)

بضرب المعادلة الثانية السابقة في (−2) وإضافتها للمعادلة الأولى فإن الناتج يكون $10\,t = 80$ ومنه $t = 8$ وبالتعويض في أي معادلة نجد أن $c=18$ وأعظم قيمة ممكنة لدالة الهدف هي 96 ريالاً.

طريقة السمبلكس للبرمجة الخطية

The Simplex Method in Linear Programming

طوّر هذه الطريقة العالم (George Dantzing) بعد الحرب العالمية الثانيـة في عـام 1947م. وهي طريقة مفيدة في حل مشاكل البرمجـة الخطيـة الكبـيرة(ذات المـوارد غـير السالبة) حيث يمكن أن يستخدم الكمبيوتر ليقوم بحل المشاكل الكبيرة بسهولة.

لفهم طريقة السمبلكس فإننا سنحاول حل المثال المبـسط الـسابق (شركـة الأويـسط) بطريقة السمبلكس خطوة بخطوة. حيث افترضـنا أن عـدد الكـراسي المـراد إنتاجهـا هو(c) وعدد الطاولات المراد إنتاجهـا أيـضا هـي (t) وكانـت صـياغة المـشكلة هـي كالتالي:

Max. $z = 3t + 4c$
subject to:
$15t + 10c \le 300$
$2.5t + 5c \le 110$
$t , c \ge 0$

وبوضعها في جدول:

اسم المورد	عدد الوحدات المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة من		
	الطاولات	الكراسي	المتاح
خشب (ياردة)	15	10	300
عمل (ساعة عمل)	2.5	5	110
ربح الوحدة الواحدة بالريال)	3	4	

المتغيرات الفائضة Slack Variables

أول خطوة لحل المشكلة بطريقة السمبلكس هو حلها جبريا لمعرفة الفوائض في الموارد المتاحة من خشب وساعات عمل. نسمي العدد المطلوب إنتاجه مـن الكـراسي (c) وعدد الطاولات المراد إنتاجها (t) بالمتغيرات الأساسية ونسمي الكمية الفائضة أو

الزائدة من الخشب ومن ساعات العمل بالمتغيرات الفائضة (Slack Variables). أي أنه من الممكن أن نضع القيود بصورة جديدة بعد إضافة المتغيرات الفائضة كالتالي:

كمية الخشب المستخدم + كمية الخشب غير المستخدم (الفائض) = الكمية الخشب الإجمالية.

عدد الساعات المستخدمة + عدد الساعات غير المستخدمة (الفائضة) = عدد الساعات الإجمالية.

افترض أننا رمزنا لكمية الخشب غير المستخدم (الفائض) بالرمز (s1) ورمزنا لعدد الساعات غيرا لمستخدمة (الفائضة) بالرمز (s2) فإن القيود يمكن الآن كتابتها كالآتي:

$$15\,t + 10c + (s1) = 300$$
$$2.5\,t + 5c + (s2) = 110$$

هنا نلاحظ أن القيود على شكل يساوي؛ لأننا جمعنا المستخدم وغير المستخدم من الموارد المتاحة، وبوضعها بالشكل السابق يخدمنا في غرضين. الأول هو لسهولة حلها جبريا إذا كانت متساوية بدلا من متراجحة. الثاني هو لسهولة تفسيرها اقتصادياً إذا كانت على هذا الشكل.

وضع المشكلة الخطية في شكل فوائض

يتم وضع المشكلة الخطية السابقة في شكل فوائض بإدخال المتغيرات الفائضة على صياغة المشكلة الخطية السابقة كالآتي:

$$\text{Max } z= 3t + 4c + (0)s1 + (0)s2$$
subject to:
$$15\,t + 10c +(1)s1+(0)s2 = 300$$
$$2.5\,t + 5c + (0)s1+(1)s2 = 110$$
$$t,c,s1,s2 \geq 0$$

هذه المتغيرات الفائضة ظهرت في دالة الهدف بمعاملات صفرية لتعكس الحقيقة بأن الموارد غير المستخدمة لا تزيد في الربح (أو حتى الخسارة) ولكن تجلس في مستودع الشركة. ووضعت المتغيرات الفائضة في القيود حتى يتم حسابها لاحقاً بشكل منظم. أيضاً فإن المتغيرات الفائضة يجب أن تكون موجبة القيمة أو أصفاراً ويستحيل

وجودها بالسالب؛ لأن وجودها بالسالب معناه أنك استخدمت من المـوارد أكثـر ممـا عندك وهذا مستحيل.

حل المشكلة الخطية جبريا

لا يمكن الآن رسم منطقة الحلول الممكنة بيانياً؛ وذلك لأنه يوجد عندنا أربعـة متغيرات بدلا من اثنـين. ولا يمكـن حـل المـشكلة لأنهـا صـارت ذات أربعـة أبعـاد وكذلك هي معادلتين في أربعة مجاهيل.

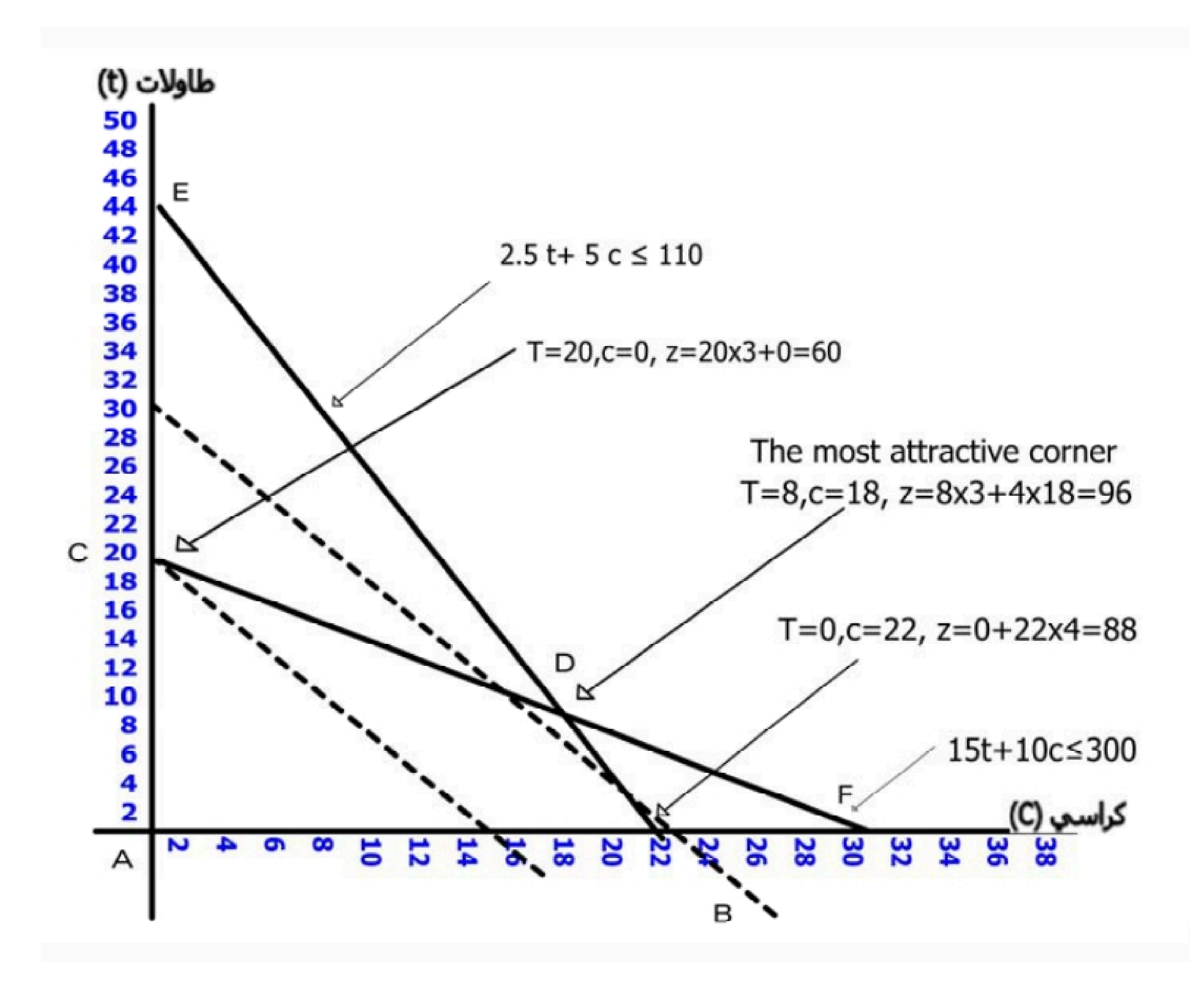
15 t + 10c +(1)s1+(0)s2 = 300
2.5 t + 5c + (0)s1+(1)s2 = 110

والخلاصة هي أنه متى ما زاد عدد المجاهيل (المتغيرات) عـن عـدد المعـادلات فإنه لحل هذه المعادلات يجب افتراض قيم ابتدائية للمتغيرات الزائدة.

خليط الحل The variable mix

في هذه المرحلة يجب أن نحدد أي من المتغيرات يوضع له قيمـة افتراضـية وأي من المتغيرات يجب أن يحل جبريا. سنطلق عـلى المتغـيرات التـي يجـب أن تحـل جبريـا بخليط الحل وقيم هذه المتغيرات يتم الحصول عليها بعد وضـع قـيم افتراضـية للقـيم الأخرى.

الـشكل التـالي يوضـح جميـع الحـالات الممكنـة مـن الحلـول لمتغـيرات الحـل والمتغيرات الأخرى للشركة. في كل حاله من الحالات الست التالية قسمت المتغـيرات إلى مجموعتين كل منهما مكملة للأخرى وكذلك القيم المقابلة لكل حل.



أقسام مناطق الحل

1- الحلول غير الممكنة (Infeasible Solution): وهي الحلول التـي تقـع خـارج نطاق الحلول الممكنة ويمكن معرفتها على الرسـم البيـاني الـسابق بـالنظر إلى المنطقـة خارج الشكل (A,B,C,D).

2- الحلول الممكنة (Feasible Solution): وهي جميع نقاط المنطقة التي تحيط بهـا الزوايا (A,B,C,D).

3- الحلول الأساسية الممكنة (Basic Feasible Solution): وهي النقاط التي تقع على زوايا الحل الممكن أي هي النقطةA وB وC وكذلك النقطة D.

4- الحل الأمثل (Optimal Solution): وهي النقطة أو النقاط التي تقع على زوايا أو أضلاع الحلول الأساسية الممكنة والتي تؤدي إلى تحقيق أعظم قيمة لدالة الهدف.

z	s2	s1	c	t	المتغيرات المثبتة قيمتها (تثبيت عند الصفر) (non-mix variable)	المتغيرات الحرة القيمة (variable mix)	زاوية الحل
0	110	300	0	0	t , c	s1, s2	A
88	0	80	22	0	t , s2	c, s1	B
60	60	0	0	20	c ,s1	t ,s2	C
96	0	0	18	8	s1, s2	t, c	D
Infeasible غير ممكن	0	360-	0	44	c , s2	t , s1	E
Infeasible غير ممكن	40-	0	30	0	t , s1	c , s2	F

لحساب قيم زاوية (B):

وضع t=0 , s2=0 والتعويض في المعادلتين الخاصتين بالقيود كما يلي:

$$15(0) + 10(22) + (1)s1 + (0)s2 = 300$$
$$2.5(0) + 5(22) + (0)s1 + (0)s2 = 110$$
$$c=22,\ s1=300-220=80,\ z=4x22=88$$

فقط الزوايا A، B، C، D، هي زوايا ممكنة للحل بينما الزوايا E، F غير ممكنتين (infeasible) وذلك لأنها تعطي كميات سالبة في المتغيرات الفائضة وهذا يخالف القيود بأن الكمية المتاحة من الخشب والعمل محدودة. في الخطوات السابقة وضحنا مبدأ السمبلكس ولم نبدأ خطوات حل السمبلكس بعد. وطريقة الحل البياني هي أفضل

وأسهل للمشاكل التي تحوي على متغيرين فقط. هنا سيتم حـل المـشكلة الـسابقة لأن ذلك سيسهل فهم طريقة السمبلكس.

لماذا لا نختبر جميع الزوايا ذات الحلول الممكنة ثم نأخذ الحل الذي يعطي أكـبر ربح؟

المشكلة التي نحن بصددها تحوي قيدين فقط ولذلك اسـتطعنا أن نجـد الحـل الأمثل باختبار جميع الزوايا ولكـن لـو زادت القيـود قلـيلا لكـان حلهـا معقـد جـدا بالطريقة السابقة ولكن بطريقة السمبلكس يمكن حلها بالرغم مـن زيـادة المتغـيرات بأكثر من متغيرين.

استخدام طريقة السمبلكس في الحل The Simplex Method

تبدأ طريقة السمبلكس بالزاوية التي تكون كمية الإنتاج فيها صـفرا (أي نقطـة تقاطع المحورين) حيث تكون متغيرات الحل" تشكيلة الحل" هي المتغيرات الفائـضة. بعد ذلك تنتقل إلى زاوية أخرى تعظم دالة الهدف بأعظم قيمة ممكنـة في كـل مرحلـة. وعندما يستحيل زيادة الأرباح فإن ذلك يعني الوصـول إلى الزاويـة الأعظـم جاذبيـة (المثلى).

خطوات الحل بطريقة السمبلكس The Simplex Method

1- صياغة المشكلة الخطيةFormulate the linear program

بعد إضـافة المتغـيرات الفائـضة واسـتبدال المتراجحـات (علامـة الأكـبر مـن والأصغر من) بمتساويات. تكون صياغة المشكلة هي كما يلي:

$z= 3t + 4c + (0)s1 + (0)s2$
$15t + 10c + (1)s1 + (0)s2 = 300$
$2.5t + 5c + (0)s1 + (1)s2 = 110$

وبالنظر إلى صياغة المشكلة السابقة نجد أنها تتكون من ثلاث قيود: القيد الأول خاص بدالة الهدف. القيد الثاني خاص بالمتراجحة الأولى (قيد الخشب). القيد الثالث خاص بالمتراجحة الثانية (قيد العمل). وهذه القيود تحقق شروط الصورة المقننة (The Canonical Form) التي بناء عليها يتم بناء جدول السمبلكس وهي:

- إن كل معادلة تقابل متغيرا أساسيا واحدا معامله يساوي الواحد الصحيح (S1, S2).
- إن كل متغير أساسي يظهر في معادلة واحدة فقط ولا يظهر أيا منهما في دالة الهدف.

2- بناء جدول السمبلكس الابتدائي The initial simplex tableau

ربحية الوحدة الواحدة unit profit		3	4	0	0	عمود	
	المتغيرات غير الأساسية / المتغيرات الأساسية	t	c	s1	s2	الحل	exchange ratio معدل التغيير
0	s1	15	10	1	0	300	=300÷10=30
0	s2	2.5	5	0	1	110	=110÷5=22*
unit sacrifice row	تضحية الوحدة الواحدة	0	0	0	0	0 [illegible]	
Improvement row	كسب الوحدة الواحدة	3	*4	0	0		

مع العلم بأن تضحية الوحدة الواحدة =ربحية الوحدة الواحدة × عمود معامل التغيير؛ لذلك فإن وحدة التضحية لكل متغير غير أساسي يكون كالتالي:

	t	c	s1	s2
	0× 15	0×10	0× 1	0×0
	0×2.5	0×5	0×0	0×1
تضحية الوحدة الواحدة	0	0	0	0

وحيث إن ربحية الوحدة الواحدة للمتغيرات الأساسية الآن تساوي الصفر فإن جميع نتائج وحدات التضحية أيضا تساوي أصفارا. وهذا يدل على أننا سنتنازل عن لاشيء إذا أدخلنا أي متغير جديد في الحل.

كذلك فإن كسب الوحدة الواحدة = ربحية الوحدة الواحدة - تضحية الوحدة الواحدة.

ربحية الوحدة الواحدةunit profit	3	4	0	0
(-) تضحية الوحدة الواحدة	0	0	0	0
Improvement row (=)كسب الوحدة الواحدة	3	4	0	0

إيجاد المتغير الداخل والخارج

بالنظر إلى كسب الوحدة الواحدة من الجدول السابق نجد أن أكبر قيمة مكتسبة ستكون بدخول المتغير c وهي 4. لذلك فإن العمود الداخل فهو التالي:

c
❋4

ولتحديد المتغير الخارج (الصف) فإنه يتم قسمة قيم عمود الحل على معاملات العمود الداخل.

300÷30=10	300	0	1	10	15
=110÷5=22❋	110	1	0	5	2.5

فيكون المتغير الخارج هو الصف الذي يحوي أقل معاملات موجبة[2](22) كما يلي:

=110÷5=22❋	110	1	0	5	2.5	s2

بناء جدول من جديد

لبناء جدول جديد فإن معادلات المتغيرات الأساسية ستكون كالتالي:

$15 t + 10 c + (1)s1 + (0)s2 = 300$

$2.5 t + 5 c + (0)s1 + (1)s2 = 110$ (المتغير الخارج)

بما أن المتغير الداخل هو c والخارج هوs2 فإننا سنغير المعادلة الثانية بحيث إن معامل c في المعادلة العمل (المتغير الخارج) يجب أن يكون واحدا صحيحا. أي بقسمة المعادلة الثانية على 5 كالتالي:

$0.5 t + 1 c + (0)s1 + (1/5)s2 = 22$ (المتغير الجديد)

لذلك فإنه إذا وضعت قيمةt وكذلك s2 تساوي أصفاراً فإن c ستساوي 22 وتكون المعادلتين السابقتين كما يلي:

$15 t + 10 c + (1) s1 + (0)s2 = 300$

$0.5 t + 1 c + (0) s1 + (1/5)s2 = 22$ (الصف الثاني الجديد)

---

(2) إذا كانت جميع معاملات التغيير أصفاراً أو سالبةً (أي لا يوجد معاملات موجبة على الإطلاق) فإن قيود المشكلة غير مقيدة.

وحيث إن معامل c يساوي الواحد الصحيح في المتغير الجديد(الثاني) و10 في المتغير(الصف) الأول، فإنه بضرب المعادلة (الصف) الثاني في −10 وأضافتها إلى الصف الأول، فإن نتيجة الحد الثاني (c) ستكون بعد جمع المعادلتين تساوي صفرا كما يلي:

$$15\,t + 10\,c + (1)s1 + (0)s2 = 300$$
$$-5\,t - 10\,c - (0)s1 - (2)s2 = -220$$

$$10\,t + 0\,c + (1)s1 - (2)s2 = 80$$

هذا الصف الجديد هو صف s1 (الكمية الفائضة من الخشب) وهذا يؤكد هذه الحقيقة عندما s2 و t (وهما المتغيرات غير الداخلة في الحل) (nonmix variables) يساويان صفرا. حيث يكون

$$0\,t + 0\,c + (1)s1 - (0)s2 = 80$$
$$s1 = 80$$

أو بعبارة أخرى في القيد:

$$15\,t + 10\,c + (1)s1 + (0)s2 = 300$$

إذا كانت قيمة c=22 وكانت قيمة t=0 فإن 80 ياردة من الخشب ستظل غير مستخدمة.

الصفين الجديدين هما كما يلي:

$$10\,t + 0\,c + (1)s1 - (2)s2 = 80$$
$$0.5\,t + 1\,c + (0)s1 + (1/5)s2 = 22$$

بناء جدول السمبلكس الثاني

دالة الهدف	ربحية الوحدة الواحدة unit profit	3	4	0	0	عمود	exchange ratio معدل التغيير
	المتغيرات غير الأساسية / المتغيرات الأساسية	t	C	s1	s2	الحل Solution values	
		Exchange coefficient					
0	s1	10	0	1	-2	80	8❋
4	c	1/2	1	0	1/5	22	44
unit sacrifice row	تضحية الوحدة الواحدة	2	4	0	4/5	88 الربح الحالي	
Improve ment row	كسب الوحدة الواحدة	1❋	0	0	-4/5		

بناء جدول السمبلكس الثالث (النهائي)

	ربحية الوحدة الواحدة unit profit	3	4	0	0	عمود	
دالة الهدف	المتغيرات غير الأساسية / المتغيرات الأساسية	t	c	s1	s2	الحل Solution values	exchange ratio معدل التغيير
		Exchange coefficient					
3	t	1	0	1/10	-0.2	8	
4	c	0	1	-1/20	.30	18	
unit sacrifice row	تضحية الوحدة الواحدة	3	4	.10	.60	96 الربح الحالي	
Improve ment row	كسب الوحدة الواحدة	0	0	-0.1	-0.6	بما أنه لا يوجد في جميع عناصر كسب الوحدة الواحدة أي عدد موجب فإن ليس ممكن زيادة الأرباح عن هذا المقدار	

مع العلم إننا حصلنا على عناصر الصف الأول بقسمة جميع العناصر على 10 كما حصلنا على عنا صر الصف الثاني كما يلي:

العنصر الجديد= العنصر القديم - (العنصر المجاور في العمود الـدليل(ثابـت) × العنصر الجديد في الصف الخارج (الأول)

فمثلاً:

0=1/2-1/2(1)
1=1-1/2(0)
-1/2= 0- ½(1/10)
0.45= 1/5-1/2(-2)
18= 22-1/2(8)

خطوات حساب جدول السمبلكس Simplex tableau

تعتمد طريقة حساب جدول السمبلكس في حالة التعظيم على الخطوات التالية:

1- الابتداء من نقطة الصفر (0.0) كحل أساسي ممكن وهي التي تقابل الزاوية A في الرسم البياني السابق.

2- فحص معاملات المتغيرات في دالة الهدف وتحديد مدى إمكانية وجود متغير غير أساسي ويؤدي زيادته إلى أعظم قيمة في دالة الهدف؟ إذا لم يوجد فنتوقف عند هذا الحد ونكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل. أما إذا وجد هذا المتغير غير الأساسي فيكون هو المتغير الداخل (Entering Variable) وننتقل إلى الخطوة التالية.

3- نزيد من قيمة هذا المتغير الداخل حتى تصل قيم أحد المتغيرات الأساسية إلى الصفر وبذلك يكون هذا المتغير الأساسي هو المتغير الخارج (Departing Variable). ثم يضمّ المتغير الداخل إلى قائمة المتغيرات الأساسية والمتغير الخارج إلى المتغيرات غير الأساسية.

4- حساب قيم المتغيرات ودالة الهدف ثم الانتقال إلى الخطوة (2).

مثال آخر على مشكلة التخفيض Minimization

شركة الطالعية تستثمر لصالح الشركات والعملاء حسب رغباتهم. أحد العملاء يرغب في استثمار 1.200.000 ريال على الأكثر في أسهم وعملات. كل وحدة استثمارية في الأسهم تكلف 50 ريالاً وتعطى عائدا بنسبة 10%. أما الوحدة الاستثمارية في العملات فإنها تكلف 100 ريال وتعطي عائدا بنسبة 4%. هذا العميل يحاول أن يخفض المخاطرة على شرط أن يربح سنويا على الأقل 60.000 ريال من هذا الاستثمار. وحسب مقاييس الشركة فإن الاستثمار في الأسهم المالية يعطي مؤشر خسارة 8 لكل

وحدة استثمارية بينما الاستثمار في العملة يعطي مؤشر خسارة 3 لكل وحدة استثمارية. مع العلم أنه كلما زاد رقم المؤشر كلما زادت المخاطرة.

هذا العميل أيضا اشترط أن يستثمر على الأقل 300.000 ريال في العملة.

السؤال هو كم وحدة استثمارية من كل نوع يجب أن تشتريها الشركة لصالح العميل إذا كان هدف العميل هو تخفيض الأخطار من هذه العملية الاستثمارية.

1- صياغة المشكلة الخطية:

نفترض أن عدد الوحدات الاستثمارية في الأسهم = $x1$

نفترض أن عدد الوحدات الاستثمارية في العملة = $x2$

• دالة الهدف: وحيث إن مؤشر الخطر للأسهم هو 8 وللعملة هو 3 فإن دالة الهدف المراد تخفيضها هي كما يلي:

$$\min 8x1 + 3x2$$

• قيد إجمالي الأموال التي يمكن الاستثمار فيها: القيد الأول يختص بكمية الأموال المطلوب الاستثمار فيها وحيث إن وحدة الاستثمار في الأسهم تكلف 50 ريالا و100 ريال للاستثمار في العملة فإن هذا القيد يمكن أن يكتب كما يلي:

$$50x1 + 100x2 \leq 1200\,000$$

• قيد العائد من الاستثمار: القيد الثاني هو أن يكون العائد من هذا الاستثمار على الأقل 60.000 ريال. وبما أن عائد الأسهم هو 10% من قيمة الأسهم و4% من قيمة العملة فإن العائد للوحدة الاستثمارية للأسهم = $50 \times 10\% = 5$ ريالات والعائد للوحدة الاستثمارية في العملة هي $100 \times 4\% = 4$ ريالات.

لذلك فإن القيد يكتب كما يلي:

$$5x1 + 4x2 \geq 60\,000$$

• قيد الحد الأدنى للاستثمار في العملات: القيد الأخير يختص بالكمية التي

يريد أن يستثمرها في العملات حيث إن الكمية المستثمرة في العملات يجب أن لا تقل عن 300.000 ريال أي:

$100x2 \geq 300\ 000$

أو بمعنى آخر

$1x2 \geq 3\ 000$

لذلك تكون صياغة البرنامج لمشكلة شركة الطالعية كما يلي:

min $8x1 + 3x2$
subject to:
$50x1 + 100x2 \leq 1200\ 000$
$5x1 + 4x2 \geq 60\ 000$
$x2 \geq 3\ 000$
$x1\ ,\ x2 \geq 0$

لحل المشكلة باستخدام السمبكلس فإنه يتعين علينا تهيئة المشكلة وتحويلها إلى جدول السمبكلس وذلك عن طريق تحويل الأقل من أو يساوي (≤) من المتراجحات إلى متساويات بإضافة المتغيرات الفائضة (slack variables) وتحويل الأكبر من أو يساوي (≥) من المتراجحات إلى متساويات بإضافة المتغيرات الزائدة (surplus variables) والمتغيرات الصناعية (artificial variables).

إذا كان عندنا قيد على شكل $x2 \geq 3\ 000$ فيجب أن نضيف متغير زائد في الجهة اليمنى بحيث يكون $x2 = 3\ 000 + s1$ ونحوله إلى متغير فائض بتحويله إلى الجهة الأخرى بعد تغيير إشارته إي $x2 - s1 = 3\ 000$ وفي مثل تلك القيود يجب أيضا إضافة متغير صناعي(وهمي) (artificial variable) إلى الطرف الأيسر من المعادلة ونرمز له بالرمز مثلا (a) ويعطي قيمة كبيرة جدا سالبة في حالة التعظيم(.max) وقيمة كبيرة جداً موجبة في حالة التصغير (.min) وذلك حتى يخرج من الحل في الخطوات الأولى. ولذلك يكون القيد على الشكل التالي:

$x2 - s1 + a1 = 3\ 000$

وبتحويل المتراجحات إلى معادلات وإضافة المتغيرات الفائضة والصناعية. تكون الصياغة كما يلي:

min z= 8x1 + 3x2 + 0s1 +0s2+ 0s3 + Ma2+ Ma3
s.t.
5x1 + 10x2 + 1s1 + 0s2+ 0s3 +0a2+ 0a3=120 000
5x1 + 4x2 + 0s1 - 1s2+ 0s3 + 1a2+ 0a3 = 60 000
0x1 + 1x2 + 0s1 + 0s2- 1s3 + 0a2+ 1a3 = 3000

2-وضعها في جدول السمبلكس:

تكلفة الوحدة الواحدة unit cost		8	3	0	0	0	M	M	عمود الحل	
	المتغيرات غير الأساسية / المتغيرات الأساسية	x1	x2	s1	s2	s3	a2	a3		exchange ratio معدل التغيير
0	s1	5	10	1	0	0	0	0	120000	120000/10 =12000
M	a2	5	4	0	1-	0	1	0	60000	60000/4 =15000
M	a3	0	1	0	0	-1	0	1	3000	3000/1 =3000* →
unit sacrifice row	تضحية الوحدة الواحدة	M5	M5	0	-M	-M	M	M	الربح الحالي 63000M	المتغير الخارج وهو اقل قيمة موجبة
Improvement row	كسب الوحدة الواحدة	-5M8	-3 *5M	0	M	M	0	0		

المتغير الداخل وهو أعلى قيمة مطلقة سالبة

لحساب المعاملات الجديدة للصف الأول الجديد فهي كما يلي:

العنصر الجديد= العنصر القديم – (العنصر المجاور في العمود الدليل × الجديد المقابل في الصف الخارج)

5 -10(0)=5
10-10(1)=0
1-10(0)=1
0-10(0)=0, 0-10(-1)=10,0-10(0)=0, 0-10(1)=-10, 120 000-10(3000)=90 000

وهكذا بالنسبة للصفوف الأخرى:

تكلفة الوحدة		8	3	0	0	0	M	M	عمود	
unit الواحدة cost	المتغيرات غير الأساسية / المتغيرات الأساسية	x1	x2	s1	s2	s3	a2	a3	الحل	Exchange ratio معدل التغيير
0	s1	5	0	1	0	10	0	-10	90000	18000
M	a2	5	0	0	1-	4	1	4-	48000	9600
3	x2	0	1	0	0	-1	0	1	3000	3000/0=∞
Unit sacrifice row	تضحية الوحدة الواحدة	5M	3	0	-M	4M -3	M	-4M +3	الأخطار الحالية 48000M +9000	
Improvement row	كسب الوحدة الواحدة	8-5M	0	0	M	-4M +3	0	+5M-3		

المتغير الخارج وهو أقل قيمة موجبة

المتغير الداخل هو أعلى قيمة مطلقة سالبة

ثم ننتقل إلى الجدول التالي:

	تكلفة الوحدة الواحدة unit cost	8	3	0	0	0	M	M	عمود	
دالة الهدف	المتغيرات غير الأساسية / المتغيرات الأساسية	x1	x2	s1	s2	s3	a2	a3	الحل	exchange ratio معدل التغيير
0	s1	0	0	1	1	6	1-	6-	42000	7000
8	x1	1	0	0	-1/5	4/5	1/5	-4/5	9600	1200
3	x2	0	1	0	0	-1	0	1	3000	-3000
unit sacrifice row	تضحية الوحدة الواحدة	8	3	0	-8/5	3.4	8/5	-3.4	الأخطار الحالية 85800	
Improvement row	كسب الوحدة الواحدة	0	0	0	8/5	3.4-	M-8/5	M+3.4		

المتغير الداخل و هو أعلى قيمة مطلقة سالبة

مع العلم بان المعاملات الجديدة حسبت كالتالي:

-4/5(1/6)=-0.1333 , -1/5-4/5(1/6)=-0.333 , 4/5-4/5(1)=0, 1/5-4/5(-1/6)=0.33, -4/5-0
4/5(-1)=0

0-(-1)(1/6)=0.16667, 0-(-1)(-1/6)=-0.1667, 1-(-1)(-1)=0, 3000-(-1)(7000)=10000

بعد حساب المعاملات الجديدة ينتج الجدول التالي:

تكلفة الوحدة الواحدة unit cost		8	3	0	0	0	M	M	عمود	0
	المتغيرات غير الأساسية / المتغيرات الأساسية	x1	x2	s1	s2	s3	a2	a3	الحل	exchange ratio معدل التغيير
0	s3	0	0	1/6	1/6	1	-1/6	-1	7000	
8	x1	1	0	-.133	-.33	0	.33	0	4000	
3	x2	0	1	-.167	.167	0	-.167	0	10000	
unit sacrifice row	تضحية الوحدة الواحدة	8	3	-0.56	-2.165	0	2.139	0	الأخطار الحالية 62000	
Improvement row	كسب الوحدة الواحدة	0	0	0.56	2.1650	0	M-2.139	M		

لا يوجد قيم سالبة ممكن إن تقلل الأخطار المراد تقليلها لذلك نتوقف عند هذا الحل وهو الحل الأمثل

تحليل الحساسية في البرنامج الخطي

Sensitivity Analysis in Linear Programming

الحل الأمثل باستخدام السمبلكس هو حل للمشكلة الخطية بمعالمها الحالية المعطاة أي ربح الوحدة الواحدة وتكلفة الوحدة الواحدة والمعاملات الأخرى مثل قيم الجهة اليمنى للقيود وغيرها. ولكن أي اختلاف أو تغيير في تلك المعاملات سيؤدي بالضرورة إلى تغير في الحل الأمثل. إذا فالمهم إيجاد وسيلة لمعرفة أثر التغيرات في المعطيات والمعاملات على الحل الأمثل ومن الممكن لفكرة البرمجة الخطية أن تطور

لتقدير وحساب أثر هذه التغيرات. هذا التطوير والإضافة لطريقة السمبلكس السابقة يعرف بتحليل الحساسية (Sensitivity Analysis) ولذلك فمهمة تحليل الحساسية هو معرفة تأثير هذه التغيرات البسيطة في المعاملات (Coefficients) أو في الكميات المتاحة. ودرجة حساسية الحل الأمثل الناتجة للتغير في هذه المعاملات قد يتراوح بين عدم التغيير في الناتج النهائي للحل الأمثل إلى تغيرات واضحة وقوية.

هذا الأمر مرتبط بأمر آخر ألا وهو شكل النموذج الخطي نفسه. مثلا نحن قد نهتم بمعرفة التغير في كمية الموارد المتاحة أو كيف سيؤثر اختيار منتج جديد ضمن الحلول المثلى على الحل الأمثل.

1- تحليل الحساسية لمعاملات الجهة اليمنى

Sensitivity Analysis for Right-hand-side Values

لأجل التوضيح اعتبر أننا استخدمنا مشكلة شركة الأويسط السابقة. افترض أنه حدث نقص في عدد عمال الشركة مما أدى إلى تقليل الساعات المتاحة. لذلك فالسؤال عند هذه الحالة هو ماذا يمكن أن يحدث للحل الأمثل؟ طبعا إذا كان التغير بسيطا فإن الحل الأمثل قد لا يتغير وبذلك فإن الزاوية المثلى ستظل كما هي ولكن التغير في كمية هذه الموارد المتاحة قد يغير الزاوية المثلى كليا أحيانا. لذلك فإننا يجب أن نسأل أيضا السؤال التالي: إلى أي مدى من الممكن أن نغير في كميات الموارد المتاحة "الطرف الأيمن" بدون أن تؤدي هذه التغيرات إلى أي تغير في الحلول المثلى الحالية "Variables mix".

لمعرفة مثلا الكمية الممكنة إضافتها أو إنقاصها من الخشب فإننا يجب أن ننظر إلى الكمية غير المستخدمة (Slack variable) من الخشب "s1".

إذا زيدت "s1" "كمية الخشب غير المستخدم" فإن كمية الخشب المستخدمة لعمل الطاولات والكراسي ستقل وبالتالي تتغير الكمية المنتجة من الطاولات

والكراسي. إلى أي حد أو مدى ممكن إنقاص الخشب بدون أن تؤدي هذه التغيرات إلى تغيرات في الحلول المثلى الحاليـة (Variables mix) ؟ أي نفـس الـسؤال لـو قلنـا إلى أي كمية يمكن زيادة الفائض من الخشب بدون أن تـؤدي هـذه الزيـادات إلى تغـيرات في الحلول المثلى الحالية (Variables mix)؟

باعتبار s1 كمتغير جديد داخل في جدول السمبلكس فإن ذلـك سـيخبرنا عـن الإجابة. بفحص معامل التغير (Exchange Coefficient) الخـاص بالخـشب المـستخدم وغير المستخدم(الرجاء النظر إلى الجدول النهائي للسمبلكس) فإننا نلاحظ أنـه يجـب أن نتخلى عن (1/10) أي (0.10) من الطاولة لكل زيـادة في s1 بوحـدة واحـدة. وهـذا يعطي للعمال وقت إضافي لعمل (-1/20) أي (-0.05) من عمل كرسي وذلك لان الرقم الـذي في عمـود s1و c هـو (-0.05). كلـما نزيـد s1 " أي لا نـستخدم خـشب لعمـل الطاولات" فإننا في النهاية سنتخلص من الطاولات. وبـما أن الطـاولات المـثلى التـي ستنتج هي 8 طاولات فإنه يمكن تحويل هذه ال 8 طاولات إلى 80 لوحـا مـن الخـشب (أي 8 ÷ (0.10) = 8 × 10 = 80) غير مستخدما. لو خفضت الكمية غير المستخدمة إلى أقل من 80 لوحا فإن معنى ذلك أنه سيظل عندنا كميـة مـن الخـشب غـير المـستخدم لعمل طاولات أو بعض الطاولة وهذا سيجعلنا ننتج على الأقل جزاء مـن الطاولـة أو أكثر وذلك حسب الكمية غير المستخدمة من الألواح. ولكن إذا أخذنا 80 لوحـا عـلى الأقل فإننا لن نستطيع إنتاج هذه الطاولات والزيادة عن 80 لـوح سـيؤثر أيـضا عـلى إنتاج الكراسي.

وفي المقابل ماذا سيحصل إذا تمت زيادة الكميـة المتاحـة مـن الخـشب ؟ إلى أي درجة ممكن أن نزيد من الخشب وستظل الشركة تنتج الطـاولات والكـراسي جميعـا ؟ زيادة الخشب هي مناظرة لإعارة خشب جديد أو الحصول عـلى فـائض مـن الخـشب

وبالنظر على أن زيادة الخشب " أو الحصول على فائض من الخشب" هـي عبـارة عـن فائض سالب. أي بإمكاننا تخفيض " غير المستخدم مـن الخـشب" إلى كميـة سـالبة " بالرغم أنه يفترض أنه لا يوجد كميات سالبة في السمبلكس ولكـن للتوضـيح فقـط" وهو نفس المعنى إذا تمت زيادة الكمية.

تفسير معامل التغير "Exchange coefficient " يكـون بـالعكس إذا كـان المتغـير الداخل منقوص معامل التغير للفائض من الخشب "s1" يخبرنـا أن الـشركة بالإمكـان الحصول على (0.10) من الطاولة وكـذلك (-0.05) مـن الكـرسي " أي إعطـاء (-0.05) لكرسي.

لذلك فكل الــ 18 كرسي بالإمكـان أن يـستبدلوا إذا وجـد عجـز أو نقـص في الخشب غير المستخدم بما يعادل 18 × 20 = 360 قدم من الألواح. وبكلمات أخرى فإن الكمية المتاحة من الألواح ممكن أن تزيد إلى حد 360 قدم من الألـواح زيـادة عـلى 300 الأصلية وجعل الكمية الجديدة = 360+300 = 660. والى هذا الحد ستظل الشركة تنتج طاولات وكراسي وهي تعمل أرباحاً وأي زيادة في الخشب عن هذا الحـد سـتؤدي إلى عدم خروج الكراسي من الحل الأمثل وبالتالي عدم وقف إنتاج الكراسي.

لتحليل حساسية الكمية المتاحة من الأخشاب نقـول أن الـشركة سـتظل تنـتج طاولات وكراسي وستكون مربحة ما دامت بين الحدين التاليين:

الحد الأدنى: 300 − 80 =220

الحد الأعلى = 300 + 360 = 660

أي بين (220 − 660).

وهذا ما كان يرى من الجداول التالية:

تأثير زيادة أو تخفيض الخشب عن الكمية المتاحة الأصلية

يمكن التوصل إلى الحل السابق بسهولة بالنظر إلى جدول السمبلكس النهائي:

مجال تغير كمية الخشب المتاحة مع الإبقاء على متغيرات الحل الأمثل			
exchange ratio معدل التغيير	Solution values الحل	s1 Exchange coefficient	المتغيرات الأساسية
80= (1/10)÷8	8	1/10	t
360 – = (-1/20)÷18	18	-1/20	c
الحد الأدنى = 300 – 80 = 220 لوح من الخشب الحد الأعلى = 300 + |360| = 660 لوح من الخشب			

تأثير زيادة أو تخفيض العمل عن الكمية المتاحة الأصلية

مجال تغير كمية العمل المتاحة مع الإبقاء على متغيرات الحل الأمثل			
exchange ratio معدل التغيير	Solution الحل values	s2 Exchange coefficient	المتغيرات الأساسية
40– =(-0.2)÷8	8	-0.2	T
60 =(.3)÷18	18	.30	C
الحد الأعلى = 110 + |40| = 150 ساعة عمل الحد الأدنى = 110 – 60 = 50 ساعة عمل			

المدى والذي حصلنا عليه بالطريقة السابقة ينطبق طالما الكميات المتاحة من الموارد الأخرى في القيود الأخرى لم تتغير إذا وجد متغير فائض "Slack variable" مع

المتغيرات الأساسية في جدول السمبلكس الأخير فإن الحد الأدنى والأعلى للتغير في الكميات المتاحة من الموارد كما يلي:

الحد الأدنى = الكمية المتاحة الأصلية – قيمة الحل للمتغير الفائض

الحد الأعلى = ∞

والمنطق وراء الحد الأدنى ذلك هو أنه لم تستخدم الموارد المتاحة في الحل الأمثل لذلك بإمكاننا تخفيض هذه الموارد إلى أقل من هذا الحد الفائض ولن تغير المتغيرات الأساسية الحل الأمثل. ولكن أي زيادة عن ذلك المقدار ستغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل.

وحيث إن الكمية المتاحة من الموارد لم تستخدم فإن أي زيادة فيها لن تؤثر على المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل ولكن ستؤثر على الفائض فقط.

الجهة اليمنى (الكميات المتاحة) للقيود من النوع " ≥ "

في الفقرة السابقة قد ذكرنا الحالة التي تكون عندها القيود من النوع "≤". وهنا نناقش حالة أخرى إلا وهي عندما تكون القيود من النوع " ≥ ". نفس الطريقة تطبق في مثل هذه الحالة ولكن المتغيرات الزائدة تستخدم لمعرفة الحدود الدنيا والعليا للقيود التي على شكل أكبر من أو يساوي. معدل التغير يجب أن يفسر بالعكس لان المتغيرات الزائدة عادة تطرح ولا تجمع كالمتغير الفائض.

عندما يكون المتغير الزائد غير موجود ضمن المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل:

الحد الأدنى = الكمية المتاحة الأصلية –أقل قيمة مطلقة للمعدلات السالبة

أو =∞- إذا " لم يوجد معدل سالب"

الحد الأعلى = الكمية المتاحة الأصلية + أقل قيمة للمعدلات الموجبة

أو = ∞ " إذا لم يوجد معدل موجب"

عندما يكون المتغير ا لزائد موجود ضمن المتغيرات الأساسية:

الحد الأدنى= − ∞

الحد الأعلى = الكمية المتاحة + قيمة الحل للمتغير الزائد

القيود من النوعية " ="

في هذه الحالة فإن النموذج يجب أن يحتوي على متغير صناعي. المتغير الصناعي هنا هو مناظر للمتغير الفائض في تحليل الحساسية. كل شيء هو كما هو في حالة المتغير الفائض ماعدا حالة أن يكون فيها المتغير الصناعي ضمن المتغيرات الأساسية والتي يجب أن تعتبر لأن المتغيرات الصناعية للقيود التي على شكل يساوي هي التي فقط تستخدم في تحليل الحساسية. وجميع أعمدة المتغيرات الصناعية الأخرى للقيود على الأشكال الأخرى يفضل أن تبعد من الحل من البداية.

تحليل الحساسية للقيود اليمنى" الكميات المتاحة" من الممكن أن تطبق في عامة أشكال البرمجة الخطية، بغض النظر عن ما إذا كانت المشكلة تعظيم أو تصغير.

الحل عند وجود تغير في الجهة اليمنى لأحد القيود

عند التغير في الجهة اليمنى لأحد القيود فإنه من الممكن إيجاد الحل الأمثل بطريقة السمبلكس منذ البداية. ولكن بعمل قليل بالإمكان تعديل الحل الأصلي الأمثل طالما التغيير في الجهة اليمنى هذه يقع بين الحدين الذين تم التوصل أليهما سابقا.

في هذه الحالة فإن القيمة الجديدة للمتغير الأساسي = القيمة الأصلية + (معامل التغير × صافي التغير في الجهة اليمنى)

صافي التغير في الجهة اليمنى = القيمة الجديدة للطرف الأيمن – القيمة الأصلية للطرف الأيمن.

مثال ذلك افترض أننا في مثال شركة الطالعية سنزيد المتاح من الخشب إلى 400 لوح من الخشب بدلا من 300 فما هي الكميات والقيم المثلى الجديدة؟

أولا: المتغيرات الأساسية:

الطاولات = $8 + (1/10 \times (400-300)) = 8 + (10) = 18$

الكراسي = $18 + (-1/20 \times (400-300)) = 18 - 5 = 13$

ومما يجدر ذكره هو أننا استخدمنا هنا معامل التغير لعمود s1

ثانيا: الربح الجديد:

$= 3 \times 18 + 4 \times 13 = 754$

افترض أن ساعات العمل قد انخفض من 110 إلى 90. ما هو تأثيرها ؟

الحل الجديد سيتم باستخدام معاملات المتغير الفائض لعنصر العمل s2.

المتغيرات الأساسية

الطاولات = $8 + (-1\backslash 2)(90-110) = 8 + 10 = 18$

الكراسي = $18 + (.45)(90-110) = 18 + 9 = 9$

الربح الجديد= $18 \times 3 + 9 \times 4 = 252$

وفي حالة أن الجهة اليمنى لأي من هذه القيود يوجد له متغير ضمن المتغيرات الأساسية فإن أي زيادة أو نقصان في ذلك المورد سيجعل المتغير الفائض يزيد أو ينقص بمقدار صافي التغير في الجهة اليمنى (القيمة الجديدة – القيمة القديمة). وجميع قيمة المتغيرات الأخرى والأرباح ستظل ثابتة كما كانت. ولكن عندما يحدث تغير في أي جهة يمنى من هذه القيود خارج المدى (خارج نطاق الحد الأدنى والأعلى) فإن

المشكلة ستكون أصعب. وقد يكون حلها من البداية أسهل من حلها من جدول السمبلكس النهائي للمشكلة الأصلية.

طريقة السمبلكس المختصرة

مشكلة التعظيم

الصياغة العامة:

max $c1\ x_1 + c_2\ x_2$
s.t.
$a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 <= b_1$
$a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 <= b_2$
$x_1, x_2 >= 0$

بعد إضافة الفوائض (slacks) يمكن وضعها في جدول كالتالي:

	constant	x_1	x_2
z	0	c_1	c_2
s1	b_1	$-a_{11}$	$-a_{12}$
s2	b_2	$-a_{21}$	$-a_{22}$

مثال:

max $3t + 4c$
s.t.
$15\ t + 10c <= 300$
$2.5t + 5c <= 110$
$t\ , c >= o$

$15t + 10c + s_1 = 300$
$2.5t + 5c + s_2 = 110$
$z = 0 + 3t + 4c$
$s_1 = 300 – 15t – 10c$
$s_2 = 110 – 2.5t – 5c$

	constant	t	c
z	0	3	4
s1	300	- 15	- 10
s2	110	- 2.5	- 5

1- اختيار عمود المحور "select the pivot column "

نختار المتغير الذي يحمل أكبر معامل موجب من صف دالة الهدف وهـو " 4 " لذلك فإن عمود الدليل هو عمود " c2" وهذا يسمى " المتغير الداخل ".

2- اختيار المتغير الخارج " صف المحور " " select pivot row "

وذلك بقسمة معاملات الطرف الأيمن من المعادلات الأصـلية (الثوابـت) أي "300, 110" على المعاملات السالبة فقط في العمود الدليل أي "10- ,5-" وتغير الإشارة " القيمة المطلقة " أي

-1*300/-10 =30
-1*110/-5 =22

وأخذ الأقل وهو 22 ليكون "المتغير الخارج هـو الـصف "s_2" وتقـاطع المتغـير الخارج (الصف) والداخل (العمـود) يكـون هـو "عنـصر المحـور" "pivot element" وتضع عليه دائرة لتمييزه عن العناصر الأخرى.

3 -إيجاد الجدول التالي: يتم رسم الجدول الجديـد ووضـع المتغـير c في الـصف الثاني وs_2 في العمود الثاني.

4- إيجاد مقلوب عنصر المحور (وهو المحور الذي يقع في تقاطع المتغير الداخل والخارج) أي 5- ومقلوبة (1/5-).

5- تقسيم جميع عناصر الصف الخارج على عنصر المحور وتغيير إشاراتهم.

أي

(-1) * (110/-5) = 22
(-1) * (-2.5/-5) = -1/2

ويكون الصف الجديد

22 , -1/2 , -1/5

6- إيجاد العناصر الجديدة لعمود المحور (الدليل) وذلك بقسمة هذه العنـاصر على عنصر المحور مع إبقاء إشارتهم أي 4/5- = 4/-5

-10/-5 = +2

ويكون الجدول بالشكل التالي:

		- 4/5
22	-1/2	-1/5

7- بقية العناصر يتم حسابها بالطريقة الآتية:

العنصر الجديد = العنصر القديم — (حاصل ضرب العنصرين في الزوايا / عنصر المحور)

أي مثلا، قيمة دالة الهدف تكون

0 – (4*110)/-5 = 88
3 – (- 2.5 * 4) / -5 = 1
300 – (-10 * 110) / -5 = 300 – 220 = 80
-15 – (-10 * -2.5) / -5= -15 +5= –10

ويكون الجدول الجديد كالتالي:

	constant	t	s2
z	88	1	-4/5
s1	80	-10	2
c	22	-1/2	-1/5

وبإعادة نفس الخطوات السابقة يكون المتغير الداخل t1 ؛ لأنه يحتوي أكبر قيمة موجبة في دالة الهدف " 1 " ، وبقسمة الثوابت على معاملات هذا العمود السالبة وتغير إشارتهم ينتج:

-1 * 80/ -10 = 8
-1 * 22 / -1/2 = 44

يكون المتغير الخارج هو "s_1" وتقاطعهم يكون عنصر المحور وهو " 10− " وبتقسيم جميع عناصر الصف الداخل على عنصر المحور وتغيير إشاراتهم ينتج:

8	-1/10	0.20

ويكون العمود الجديد

1/-10 = -0.10
-1/2/-10 = 0.05

ويكون الجدول الجديد كالتالي:

		s_1	s_2
z	96	-0.10	-0.60
t	8	-1/10	.20
c	18	0.05	-16/100

مع العلم أنه تم حساب بقية العناصر التي لا تقع على العمود الداخل أو الصف الخارج كما يلي:

88 – (1* 80) / -10= 88 + 8 = 96
22 – (80*-1/2) / -10=22 – 4 = 18
- 4/5 – (1*2) / - 10=-4/5 + 0.2 = - 0.60
-1/5 – (-2 * -1/2) / -10= -1/5 + 1/10 = - 3 / 10

تفسير الحل

بما أن جميع القيم في صف المتغيرات غير الأساسية " صف دالة الهدف " كلها قيم سالبة ، فإننا نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل.

الحل الأمثل كالتالي: x1=8, x2=18

والذي يؤدي إلى أرباح مقدارها 96

كذلك فإن قيمs_1 , s_2 كلها أصفار أي لا يوجد وقت أو خشب فائض لم يستغل، وإذا وجد في الحل أي من الفوائض فإنه يدل على الموارد الزائدة.

مشكلة التخفيض

Simplex methods for minimization:

مشكلة التخفيض تكون صياغتها عادة كالتالي:

$$\min z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$
s.t
$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 >= b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 >= b_2$$
$$x_1, x_2 >= 0$$

وتكون تهيئتها لجدول السمبلكس بإضافة متغيرات فائضة للجانب الأيمن من المعادلة:

$a11\ x1 + a12\ x2 = b1 + s1$
$a21\ x1 + a22\ x2 = b2 + s2$

تكون الفوائض كالتالي:

$s1 = -b1 + a11\ x1 + a12\ x2$
$s2 = -b2 + a21\ x1 + a22\ x2$

ويبدأ الحل الابتدائي عندما تكون المتغيرات الأساسية (غير الفائضة) تساوي صفر كما في مشكلة التعظيم (max). ولكن هنا تفسير الحل الابتدائي هو أننا نبدأ من حل غير ممكن "infeasible " حتى الوصول إلى الحل الأمثل. كذلك نبدأ بقيمة صفر لدالة الهدف؛ وذلك لأن المتغيرات الأساسية تكون أصفار في الحل الابتدائي.

جدول الحل الابتدائي سيكون كالتالي:

		x_1	x_2
Z	0	c_1	c_2
-s1	$-b_1$	a_{11}	a_{12}
-s2	$-b_2$	a_{21}	a_{22}

ولكن للتأكد من أن الحل امثل من عدمه يجب أن ننظر إلى عمود الثوابت (b_1، b_2) (وليس الصف كما في التعظيم)، وإذا كانت القيم الموجودة موجبة (لا يوجد سالب) فإننا توصلنا إلى الحل الأمثل.

ووجود الفوائض بالسالب يدل على أن الحل غير ممكن؛ وذلك لأنه لا يوجد فوائض بالسالب. لتطوير الحل الابتدائي فإننا نتبع الإجراءات التالية مع المثال التالي:

$\min z = 4200\ x_1 + 3000\ x_2$
s.t
$4\ x_1 + 2\ x_2 >= 120$
$2\ x_1 + 3\ x_2 >= 120$
$x_1 + 2\ x_2 >= 70$
$x_1\ ,\ x_2 >= 0$

لتهيئة الصياغة السابقة لجدول السمبلكس يجب إضافة المتغيرات الفائضة كالتالي:

$4\ x1 + 2\ x2 = 120 + s1$
$2\ x1 + 3\ x2 = 120 + s2$
$x1 + 2\ x2 = 70 + s3$

ونضع الفوائض في جهة وبقية المعادلة في الجهة الأخرى كالتالي:

$s_1 = -120 + 4\ x_1 + 2\ x_2$
$s_2 = -120 + 2\ x_1 + 3\ x_2$
$s_3 = -70 + x_1 + 2x_2$

ثم نضعها في جدول السمبلكس بعدما نضيف إليهما دالة الهدف ونجعلها تساوي الصفر حيث يكون جدول السمبلكس الابتدائي كالتالي:

	Constant	x_1	x_2
Z	0	4200	3000
S_1	-120	4	2
S_2	-120	2	3
S_3	-70	1	2

و بما أن الجدول الابتدائي السابق يحوي قيم سالبة في عمود الثوابت "constant" فإن الحل غير أمثل، ولتطويره فإننا نعمل الآتي:

1- إيجاد صف المحور (المتغير الخارج)، والذي يحوي على أكبر قيمة سالبة.

ولذلك فإنه يمكن أن نختار s_2أو s_1 لأن كل منها يحوي القيمة (120-).

افترض أننا أخذنا الأول ، s_1 ويكون هو المتغير الخارج.

2- اختيار عمود المحور " المتغير الداخل "

يجب النظر إلى القيمة الموجبة في صف المحور وقسمة معاملات دالة الهدف عليهم حيث يكون كالتالي:

$$3000/2 = 1500\ ,\ 4200/4 = 1050$$

وحيث إن القيمة الأقل هي 1050 فإن المتغير الداخل " عمود المحور " هو x_1.

3- يكون عنصر المحور هو "4" ولذلك نضع عليها دائرة ونحضر المقلوب لهذا العنصر وتقسم بقية العناصر في هذا الصف على هذا العنصر مع تغيير إشاراتهم:

أي يكون (2/4) 1- , ¼ , (120/4-) 1- أو 1/2- , ¼ , 30 على التوالي.

4- نوجد قيمة عمود المحور بالقسمة على عنصر المحور بدون تغيير الإشارة

أي ¼ , 2/4 , 4200/4

وبوضع المتغير الداخل والخارج يكون شكل الجدول الثاني كالتالي:

		s_1	x_2
z		1050	
x_1 s_2 s_3	30	¼ ½ ¼	-1/2

5- تطبيق المعادلة التالية لحساب بقية العناصر:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \frac{\text{حاصل ضرب العناصر المناظرة للعنصر الدليل}}{\text{عنصر المحور}}$$

0 – (4200 * 120)/4 = 126000
-120 – (-120 * 2)/4 = -60
-70 – (-120 * 1)/4 = -40
3000 – (4200 * 2) /4 = 900
3 – 2*2 /4 = 2
2 – 2*1 /4 = 1.5

فيكون الجدول كالتالي:

	Constant	s_1	x_2
Z	126000	1050	900
X_1	30	¼	-1/2
S2	-60	½	2
S3	-40	¼	1.5

وبما أنه يوجد قيمة سالبة في عمود المحور " الثوابت " "constants" فإن الحل ما زال غير أمثل.

وباتباع نفس الخطوات السابقة نجد أن الصف الخارج هو s_2 والعمود الـداخل هو x_2 ويكون عنصر المحور هو 2 ويكون جدول الحل التالي الجدول كالتالي:

		s_1	s_2
z	153000	825	450
X1	15	3/8	-1/4
X2	30	-1/4	½
S3	5	-1/8	3/4

وتفسير الحل هو كالتالي: $z= 153000, s_3 = 5 , x_2 = 30 , x_1 = 15$

مشاكل مع القيود المختلطة

في الحياة العملية عادة ما تكون القيود تشمل قيود على شكل "<=" و ">="

1- في مشاكل التعظيم " maximization "

افترض أن عندنا الصياغة التالية:

Max z = c1 x1 + c2x2
s.t.
$a11\ x1 + a12\ x2 \geq b1$
$a21\ x1 + a22\ x2 \leq b2$

ولكن هنا يجب إغفال المشكلة هل هي تعظيم أو تخفيض والنظر إلى القيود بوضع الفوائض في مكانها الصحيح:

$a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 = b_1 + s_1$
$a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + s_2 = b_2$

وتكون كالتالي:

s1 = -b1 + a11 x1 + a12 x2
s2 =b2 – a21 x1 – a22 x2

ونكمل الحل كما في مشاكل التعظيم

2- في مشكلة التخفيض "minimization "

افترض أن عندنا قيود على شكل "<=", ">=" , " = " كالتالي:

min z = c1 x1 + c2 x2 + c3 x3
s.t
$x1 \leq b1$
$x2 \geq b2$
$x3 \geq b3$

$x1 + x2 + x3 = b4$

حيث إن طريقة السمبلكس لا تسمح بالقيود التي لا يوجد فيها فوائض فإن القيد الأخير والذي على شكل " = " يتم التخلص منه بتعويضه في القيود الأخرى فمثلاً

$x_1 = b_4 - x_2 - x_3$

ويتم التعويض في القيود الأخرى بما فيها دالة الهدف، أي يتم إعادة صياغتها بالطريقة التالية:

$$\min z = c1\ (b4 - x2 - x3) + c2\ x2 + c3\ x3$$
s.t
$$(b4 - x2 - x3) <= b1$$
$$x2 >= b2$$
$$x3 >= b3$$

ويمكن حلها كما سبق ثم للوصول إلى قيمة x_1 فإننا نعوض في المعادلة

$x1 = b4 - x2 - x3$

وذلك بالقيم المثلى x_3وx_2

أو يمكن حلها بإضافة متغير صناعي للمتغير الأخير حيث يكون كالتالي:

$s4 = -400 + x1 + x2 + x3$

وتكون قيمة "s_4" تساوي الصفر في الحل النهائي الأمثل؛ وذلك لأن المتغير لا يوجد فيه فوائض.

- **التحلل " degeneracy ":**

يحدث التحلل إذا كان عندنا قيمتين متساويتين مؤهلتين لأن يكونا كلاهما عنصر المحور وهي تحدث في مشكلة التعظيم وكذلك التخفيض وتؤدي إلى وجود أحد الحلول الأساسية مساوياً للصفر.

- **حلول متعددة مثلى " multiple optimal solutions ":**

يحدث عندما تكون دالة الهدف موازية لأحد القيود ويوضح أنه يوجد أكثر من حل أمثل للمشكلة إذا كان هناك صفر أو أكثر من صفر في صف دالة الهدف في جدول السمبكس.

- **المشاكل غير المقيدة " unbound feasible solutions "**

في بعض الحالات النادرة يكون مجال الحلول الممكنة " feasible solution" غير محددة بمنطقة معينة أي يكون مجالها لا نهائي (∞ +) ويمكن التعرف عليها من القيمة التي في صف دالة الهدف (في حالة التعظيم) فإذا وجدنا أن بعض قيم بعض المتغيرات في كل جدول جديد يكون موجباً دائما فإنه دليلاً على وجود هذه المشكلة. وهذه المشكلة عادةً سببها الصياغة الخاطئة.

التطابقية (أو الثنائية) وتحليل الحساسية

Duality and Sensitivity Analysis

إن جدول السمبلكس في الحقيقة يعطينا معلومات إضافية مهمة غير التي تطرقنا إليها من قبل. هذا المعلومات الإضافية تعرف بالمرافقة، وكل برنامج أولي " primal problem " يوجد له برنامج نظير آخر يسمى برنامج مرافق " dual problem ".

الحل الترافقي للمشكلة أو للبرنامج الأولي مهم جداً؛ لأنه يعطي معلومات اقتصادية ورياضية.

صياغة المشكلة المرافقة " formulation of dual problem ".

افترض أنه يوجد عندنا المشكلة الخطية التالية:

$$\max = c_1 \chi_1 + c_2 \chi_2$$

$$s.t$$

$$a_{11} \chi_1 + a_{12} \chi_2 \leq b_1$$

$$a_{21} \chi_1 + a_{22} \chi_2 \leq b_2$$

$$\chi_1 , \chi_2 \geq 0$$

فإنه يمكن صياغة المشكلة المطابقة أو الثنائية للبرنامج السابق كالتالي:

أولاً: إذا كانت الصياغة الأصلية (max)، فتكون المرافقة (min) والعكس صحيح وعدد متغيرات المرافقة هو عدد القيود الأصلية، وعدد قيود المرافقة هو عدد المتغيرات الأصلية. ومعاملات دالة الهدف في المشكلة الأصلية هي ثوابت القيود في المرافقة والعكس، واتجاه الأقل من أو يساوي يكون أكبر أو يساوي والعكس. أي يكون البرنامج التوافقي لها كالتالي:

$$\min \quad b_1 y_1 + b_2 y_2$$
$$s.t$$
$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 \geq c_1$$
$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 \geq c_2$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

مثال:

مصنع الشوكي ينتج نوعين من ألعاب سيارات الأطفال:

النوع الأول: بالريموت كنترول "x1 "

والنوع الثاني: بدون ريموت كنترول " x2 ".

وإذا كانت أرباح 10 وحدات من x1، x2 هي 2، 3 ريال على التوالي والمدة التي يتطلبها صنع كل 10 وحدات من x1 هي 3 ساعات في المصنع a، وساعة في المصنع b. بينما 10 وحدات من x2 تتطلب ساعتين في المصنع a وساعتين في b.

علماً بأن الوقت المتوفر في المصنع a هو 20 ساعة وفي b هو 10 ساعة.

المطلوب إيجاد العدد الأمثل من الألعاب وتفسير الحل.

البرنامج الأصلي هو كالتالي:

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$
$$s.t.$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 20$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

الجدول الابتدائي:

		x1	x2
z	0	2	3
s1	20	-3	-2
s2	10	- 1	- 2

الجدول الثاني:

		x1	s2
z	15	-1/2	-3/2
s1	10	-2	1
x2	+5	-1/2	-1/2

الجدول الثالث:

		s1	s2
z	17.5	-1/4	-4/5
x1	5	-1/2	+1/2
x2	2.5	¼	-3/4

وبما أن جميع القيمة في صف دالة الهدف قيمة سالبة إذاً هـذا هـو الحـل الأمثـل ويكون البرنامج الترافقي المقابل هو كالتالي:

$$\min \; z = 20y_1 + 10y_2$$
$$s.t.$$
$$3y_1 + y_2 \geq 2$$
$$2y_1 + 2y_2 \geq 3$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

القيد الأول في المرافقة يتعلق بالنوع الأول من السيارات (x1)بينما القيد الثاني يختص بالنوع الثاني (x2).

كذلك y1 يتعلق بالوقت المتاح في المصنع الأول، بينما y2 يتعلق بالوقت المتاح في المصنع الثاني.

حل المشكلة المرافقة:

الجدول الأول:

		y1	y2
z	0	20	10
s1	-2	3	1
s2	-3	2	2

الجدول الثاني:

		y1	s2
z	15	10	5
s1	-1/2	2	½
y2	3/2	-1	½

الجدول الثالث:

		s1	s2
z	17.5	5	2.5
y1	¼	½	-1/4
y2	5/4	-1/2	¾

وحيث إن جميع القيم بأعمدة الثوابت constant موجبة. إذاً فالحل أمثل.

في المشكلة الأصلية الهدف هو معرفة قيمة x1، x2 المثلى التي تؤدي إلى تعظيم الربح في حدود الوقت المتاح في المصنع (a) و(b). ولكن في المشكلة المرافقة الهدف هو تخفيض تكاليف إنتاج هذين المنتجين بـ 20 ساعة متوفرة في a و10 ساعات متاحة في b.

تكلفة الساعة الواحدة في b،a يجب أن نعرفها حتى تخفض مـن تكـاليف إنتـاج هذين السلعتين. ولذلك فإن المتغيرين y1، y2 تعبر عن تكاليف إنتاج كل مـن x1، x2، في المصنع a، b.

وفي قيود المشكلة المرافقة يتضح أن عدد الـساعات المطلوبـة للـسلعة الأولى في المصنعين هي 3، 1 على التوالي. " y13 " يوضح تكلفـة صـنع x1 في المـصنع a، و" y2 " هو تكلفة صنع x1 في b.

ومجموعهم " y1 + y23 " يعبر عن إجمالي تكلفة صـنع 10 وحـدات مـن النـوع الأول من السيارات " x1 " في كل من المصنعين. وهذه التكلفة لا تقل عن 2.

وكذلك " y1 + 2y22 " يعبر عن إجمالي تكلفة صنع 10 وحدات من النوع الثاني من السيارات " x2 " في كل من المصنعين. وهذه التكلفة لا تقل عن 3.

- افترض أن المصنع سيبيع موارده؛ إذاً فإنه يجب معرفة الـسعر الـذي يجـب أن يبيعها به.

y1 هو إنتاجية الساعة الواحدة في المصنع الأول.

y2 هو إنتاجية الساعة الواحدة في المصنع الثاني.

لذلك فإن أسعار هذين الموردين تتحدد بمعرفة y1، y2، وهي التي يراد تحقيقها في دالة هدف المرافقة.

$$\min \quad z = 20y1 + 10y2$$

كذلك بالنظر إلى القيد الأول فإن النوع الأول من السيارات يجب أن يباع بـــ 2 ريال على الأقل وهي نتيجة لـ 3 ساعات عمل في المصنع الأول وساعة في المصنع الثاني كذلك النوع الثاني من السيارات يجب أن لا يقل سعرها عن 3 ريال وهي نتيجة الـــ 2 ساعة في المصنع الأول و2 ساعة في المصنع الثاني.

سعر الظل

سعر الظل الخاص بأحد القيود هو القيمة الإضافية التي يتم بها تعظيم أو تخفيض دالة الهدف نتيجة زيادة ثابت القيد بوحدة واحدة.

لذلك فإن دالة الهدف إذا كانت ثوابت القيود هي 20، 10

$$20y1 + 10y2$$

وبالتعويض في دالة الهدف بقيمة $y1, y2$

فتكون: $20(1/4) + 10(5/4) = 17.50$

وإذا افترضنا أن ثابت القيد الأول تغير من 20 إلى 21 (مع بقاء المتغيرات الأولى) فإن الدالة ستتغير بمقدار $21(1/4) + 10(5/4) = 17.75$

أي أن زيادة ساعة واحدة في المصنع الأول ينتج 1/4 ريال زيادة في الأرباح.

كذلك إذا افترضنا أننا زدنا ساعة واحدة في القيد الثاني ليكون 11 بدلاً من 10 فإن الربح الجديد سيكون:

$$20(1/4) + 11(5/4) = 18.75$$

أي أن كل زيادة في قيمة القيد الثاني (المصنع الثاني) ينتج عن ربح زيادة 1.25 ريال.

الحل الأمثل في المشكلة المرافقة كان "17.5" وهو أقل تكلفة يمكن أن نتحملها بالإبقاء على الطاقة المتاحة من الساعات في كل مركز. قيمة المتغيرات y1، y2 والتي هي ¼،5/4 على التوالي توضح أن الساعة الواحدة تكلف ¼ ريال للشركة في المصنع الأول، 5/4 في المصنع الثاني. لذلك فإن الشركة يجب أن لا تنتج أي سلعة في المصنع الأول (a) إذا كانت أرباحه لا تغطي هذه التكاليف، ولا تنتج أي سلعة في المصنع الثاني (b)، إلا إذا كانت أرباحها أكثر من 4/ 5 ريال، وهذا يعرف بتحليل الحساسية.

مسائل على البرمجة الخطية

1- (قرار حملة تسويقية) تقوم إحدى الشركات بحملة إعلانية واسعة من خلال ثلاث وسائط إعلامية هي التلفزيون والإنترنت والجرائد. وتهدف الشركة من هذه الحملة الحصول على أكبر تأثير على الزبائن المشاهدين. وكانت نتيجة الدراسة كالآتي:

	التلفزيون		الإنترنت	الجرائد
	صباحاً	مساءً		
تكلفة الإعلان للمرة الواحدة	40000	75000	300	15000
قوة (تأثير)الإعلان حسب الدراسة	8	7	5	6
عدد العملاء المحتمل وصول الإعلان لهم	40000	90000	80000	50000

ولا ترغب الشركة في إنفاق أكثر من 800000 على هذه الحملة الإعلانية بينما ترغب أن يكون عدد العملاء الذين يصل إليهم الإعلان 500000 على الأقل. وأن تكون تكلفة الإعلان عن طريق التلفزيون لا يزيد عن 500000. بينما يكون عدد مرات الإعلان في التلفزيون الصباحي لا يقل عن 3 مرات.

أما الإعلان في الإنترنت فيكون ما بين 5 مرات إلى 10 مرات. المطلوب هو صياغة المشكلة الخطية فقط:

2- (قرار استثمار) يريد تاجر استثمار 100000 ريال في أسهم ثلاث شركات مختلفة لتحقيق أكبر عائد ممكن. والجدول التالي يبين سعر أو قيمة السهم الواحد والعائد السنوي المتوقع وكذلك الحد الأقصى للاستثمار.

اسم الشركة	سعر السهم	العائد السنوي	الحد الأقصى للاستثمار
الشركة الزراعية	60	7	60000
شركة سابك	50	5	25000
شركة الأدوية	55	5.5	30000

المطلوب هو صياغة المشكلة بطريقة البرمجة الخطية (Liner Programming).

3- (قرار صنع أو شراء) شركة الخالدية تقوم بتصنيع أدوات تجارية وهندسية متطورة. الشركة تفكر الآن في تنزيل نوعين من الآلات الحاسبة. الأولى للاستخدام في التجارة والأخرى للأغراض الهندسية. كل من هذه الآلات تتكون من ثلاث أجزاء:

أ) قاعدة

ب) كاترج إلكتروني

جـ) غطاء خارجي

القاعدة تصلح لكل من النوعين ولكن الكاترج والغلاف الخارجي يختلفان.

هذه الأجزاء الثلاثة من الممكن أن تصنع في مصنع الخالدية أو ممكن شراءها من مصانع أخرى خارجية. تكاليف الصنع وأسعار الشراء كالآتي:

الجزء	تكلفة الوحدة الواحدة		الوقت المستغرق لصناعة الوحدة الواحدة (بالدقيقة)
	الصنع	الشراء	
القاعدة	0.5	0.6	1.0
كاترج إلكتروني (تجاري)	3.75	4.0	3.0
كاترج إلكتروني (هندسي)	3.30	3.90	2.5
غطاء (تجارية)	0.6	0.65	1.0
غطاء (هندسية)	0.75	0.78	1.5

الشركة تتوقع أن يكون الطلب على الآلات التجارية 3000 والهندسية 2000. ولكن الوقت المتاح للشركة متاح ب 200 ساعة في خلال وقت الدوام و50 ساعة خارج دوام. حيث يكلف خارج الدوام 9 ريال للساعة الواحدة. الجدول السابق يوضح الوقت المستغرق بالدقائق لصنع كل وحدة.

الشركة تواجه مشكلة تقرير كم وحدة من كل من الأجزاء الثلاثة يجب إنتاجها وكم يجب اشتراه للوصول إلى أقل تكلفة ممكنة.

4- (تحديد كمية الإنتاج) شركة التقنية المحدودة تنتج ثلاث منتجات باستخدام مصنعين. تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من كل منتج هي كالتالي:

	المنتج 1	المنتج 2	المنتج 3
المصنع A	5	6	8
المصنع B	8	7	10

كل مصنع يمكن أن ينتج 10.000 وحدة. وعلى الأقل 6000 وحدة من المنتج الأول و8000 من الثاني و5000 من الثالث يجب أن تنتج. ما هي صياغة البرنامج الخطي إذا أردنا تخفيض التكاليف؟

5- (محافظ استثمارية) شركة العليا المتحدة (OUC) والتي مركزها في الرياض حصلت على 100.000ريال نتيجة بيع بعض أسهمها الصناعية. والآن الشركة تبحث عن فرصة استثمارية في أسهم صناعية أخرى. وبناء على نصائح وتوقعات الخبير الاستثماري للشركة فإن الشركة يجب أن تستثمر في صناعة النفط (OI) أو الحديد (SI) أو الأسهم الحكومية(GB) فقط. وقد توقع الخبير العوائد التالية:

نوع الاستثمار	العائد المتوقع %
1- نفط الظهران (A)	7.3
2- نفط الجبيل (J)	10.3
3- حديد نجران (N)	6.4
4- حديد الرياض (R)	7.5
5- أسهم الحكومة (G)	4.5

وحسب تعليمات إدارة الشركة فإن الاستثمار في أي من الصناعات(النفط أو الحديد) يجب أن لا يزيد عن 50.000 ريال. وأسهم الحكومة يجب أن لا تقل عن 25% من أسهم صناعة الحديد. كذلك فإن الاستثمار في نفط الجبيل، والذي يعطي أكبر عائدا وأكثر خطرا، يجب أن لا يزيد عن 60% من أجمالي الاستثمار في صناعة النفط. والمطلوب صياغة المشكلة الخطية مع استخدام نفس الرموز المعطاة ، مع العلم أن المشكلة هي مشكلة تعظيمية (.Max)

6- شركة صحراء نجد تنتج نوعين من المنتجات التي تتطلب أن تصنع في اثني من المصانع المختلفة. كل من المصانع له طاقة استيعابية من ساعات العمل لا يمكن زيادتها والتي يجب أن توزع بين هذين المنتجين حسب المدة التي يستغرقها صنع الوحدة الواحدة من المنتجين. الجدول التالي يوضح هذه المعلومات بالتفصيل:

المصنع	الأول	الثاني	ربح الوحدة الواحدة
الوقت اللازم لصنع وحدة واحدة من المنتج الأول (ساعة)	0.9	0.7	26
الوقت اللازم لصنع وحدة واحدة من المنتج الثاني (ساعة)	1.3	0.6	28
إجمالي	670	620	

المطلوب هو صياغة المشكلة الخطية فقط علما بان الهدف هو تعظيم الأرباح:

7- شركة ماما هياء هي شركة سعودية لإنتاج البيتزاء المثلجة. تحصل الشركة على ربح مقداره 1 ريال مقابل بيع البيتزاء العادية وربح مقداره 1.50 ريال مقابل صنع البيتزاء الديلوكس. كل بيتزاء تحتوي على جزأين: جزء خليط عجينة وجزء خليط حشوة. وعند الشركة الآن في مستودعها 150 كيلوغرام من العجينة و50 كيلو غرام من الحشوة. البيتزاء العادية تستخدم 1 كيلو غرام من العجينة و40 جرام من الحشوة. أما البيتزاء الديلوكس فتستخدم 1 كيلو غرام من العجينة و80 جرام من الحشوة. بناء على الخبرة السابقة في الطلب فإن الشركة ينبغي عليها صنع 50 من النوع العادي و25 بيتزاء ديلوكس على الأقل. المطلوب هو صياغة المشكلة الخطية للوصول إلى عدد البيتزاء العادية والديلوكس التي يجب أن تصنعها الشركة للوصول إلى أعظم الإرباح.

8- في مشكلة البرمجة الرياضية التالية:

$$\text{Max } z=8x_1+10x_2$$
s.t.
$$4x_1+5x_2 \le 40$$
$$-6x_1-4x_2 \le -36$$
$$0 \le x_1 \le 10\ ,\ 0 \le x_2 \le 8$$

- المطلوب
- أولا: رسم المشكلة.
- ثانيا: تحديد منطقة الحل الممكن؟
- ثالثا: توضيح هل يوجد حل أم لا؟
- رابعا: إذا وجد حل امثل فهل هو حل واحد أم حلول متعددة؟

9- إذا كان جدول السمبلكس الأتي هو احد جداول السمبلكس في مراحل الحل الأمثل لمشكلة تعظيم (MAX):

	constant	X2	S2
Z	88	1	-4/5
S1	80	-10	2
X1	-22	-1/2	-1/5

المطلوب أولا: هو إيجاد القيم التالية من الجدول السابق:

X1=…………., X2=…………………,S1=………………………, S2=………………..

المتغير الداخل =…………، المتغير الخارج=…………، دالة الهدف=…………

ثانيا: اختبار هل الحل امثل أم لا؟ إذا كان الحل غير امثل الرجاء تعبئة الجدول التالي فقط.

10- في مشكلة التعظيم التالية المطلوب إكمال الجدول والتأكد من أمثلية الحل؟ إذا كان الحل غير امثل المطلوب تحديد المتغير الداخل والخارج، والانتقال لجدول السمبلكس الثاني:

ربح الوحدة الواحدة unit cost	المتغيرات الأساسية	3	8	0	0	0	0	−M	عمود الحل	Exchange ratio معدل التغيير
		x1	**x2**	**s1**	**s2**	**s3**	**s4**	**a1**		
0	s1	2	4	1	0	0	0	0	1600	
0	s2	6	2	0	1	0	0	0	1800	
0	s3	0	1	0	0	1	0	0	350	
−M	a1	1	1	0	0	0	−1	1	300	
row unit sacrifice تضحية الوحدة الواحدة										
Improvement row كسب الوحدة الواحدة										

ومن الجدول السابق: أوجد

المتغير الداخل =　　المتغير الخارج =　　قيمة عنصر المحور (الارتكاز)=　　الربح=

X1=　x2=　s1=　s2=　s3=

s4=　a1=

11- إذا كانت المشكلة الأصلية (Primal problem) لتكوين خليط من غذاء صحي يهتم بالرشاقة هو كما في المشكلة التالية:

Min　$50y_1 + 20y_2 + 30y_3 + 80y_4$

s.t.　$400y_1 + 200y_2 + 150y_3 + 500y_4 \geq 500$　قيد الكالوري

$3y_1 + 2y_2 \geq 6$　قيد الشيكولاته

$2y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 4y_4 \geq 10$　قيد السكر

$2y_1 + 4y_2 + y_3 + 5y_4 \geq 8$　قيد الدهون

$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

عدد الأسماك = Y_1　　المشروبات الغازية = Y_3

عدد الايسكريم = Y_2　　الكيك = Y_4

المطلوب هو صياغة المشكلة المرافقة أو الثنائية (Duality Problem) للمشكلة الأصلية.

استخدام الحاسب في حل مسائل البرمجة الخطية

حل مشاكل البرمجة الخطية باستخدام (Solver)

في هذه المسالة سيتم استخدام برنامج اكسل (Microsoft Excel) والموجود ضمن حزمة مايكروسوفت أوفيس (Ms Office) في حل هذه المشكلة. ولحل مشكلة البرامج الرياضية عموما والبرمجة الخطية خصوصا باستخدام برنامج اكسل يتعين علينا إضافة أداة الحل (Solver) إلى قائمة الأدوات. وهذا يتم بالذهاب إلى قائمة أدوات ثم الوظائف الإضافية والتأشير على Solver Add-in ثم موافق.

وللتذكير فإن المشكلة التالية المطلوب حلها هي:

Max $Z=3t + 4c$
s.t
$15t + 10c \le 300$
$2.5t + 5c \le 110$
$t,c \ge 0$

ولحلها نقوم بتشغيل برنامج إكسل وفي الخلية B6 مثلا نكتب المعادلة التالية بصيغة EXCEL: =B4*B5

ويعمل نفس الشيء في الخلية C6

الخلية E6مجموع الخلايا B6 و C6وذلك بكتابة المعادلة التالية:

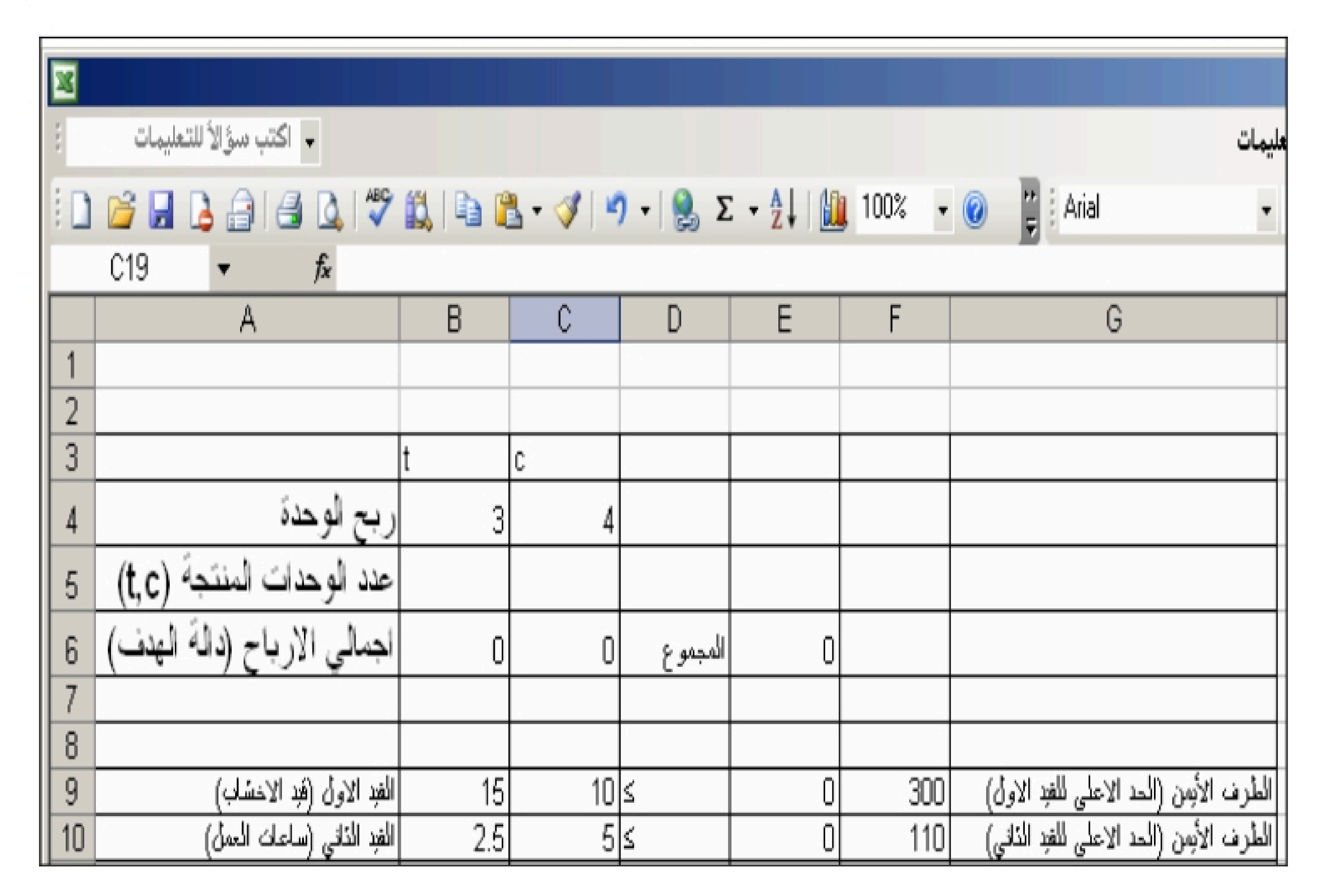
=SUM(B6:C6)

في الخلية E9 نكتب التالي:

=(B5*B9)+(C5*C9)

في الخلية E10 نكتب التالي:

=(B5*B10)+(C5*C10)

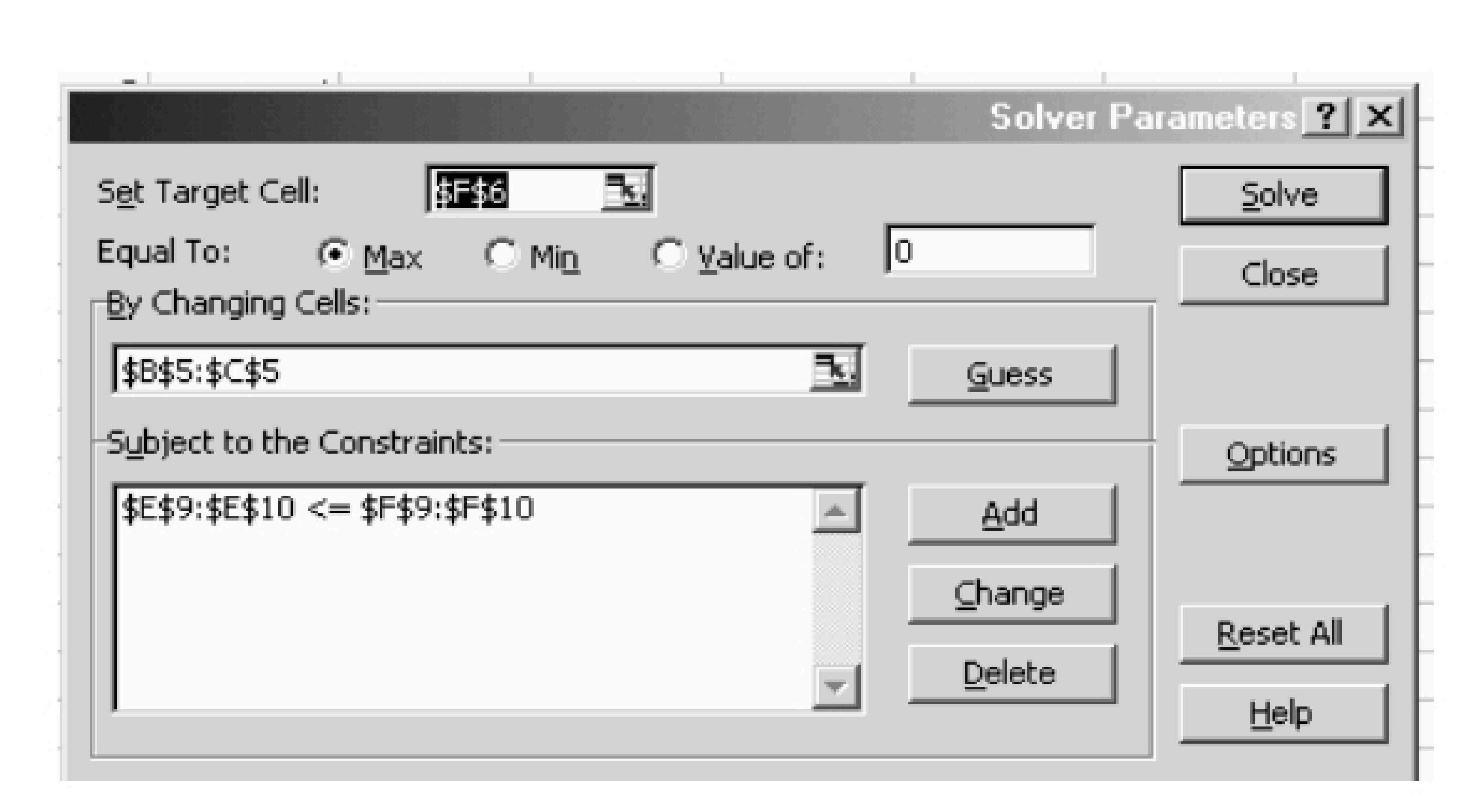


	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3		t	c				
4	ربح الوحدة	3	4				
5	عدد الوحدات المنتجة (t,c)						
6	اجمالي الارباح (دالة الهدف)	0	0	المجموع	0		
7							
8							
9	القيد الاول (قيد الاخشاب)	15	10	≤	0	300	الطرف الأيمن (الحد الاعلى للقيد الاول)
10	القيد الثاني (ساعات العمل)	2.5	5	≤	0	110	الطرف الأيمن (الحد الاعلى للقيد الثاني)

من نافذة solver parameters نحدد قيمة دالة الهدف في الخلية E6 وذلك باختيار Set Target Cell .

نحدد متغيرات القرار في الخلايا B5,C5 وذلك باختيار By Changing Cell

اختر Add وذلك لتحديد القيود، ثم من نافذة Add Constraint اختر Cell Reference ونحدد الخلايا E9 إلى E10 وأبق (=>) كما هي ثم اختر Constraint ونحدد الخلايا F9 , F10 ثم OK



ومن Options ستظهر نافذة أخرى Solver Options نختار Assume linear Model ثم. Ok من نافذة Solver Parameter اختر Solve ستظهر النتائج النهائية:

Microsoft Excel - swa.xls

	A	B	C	D	E	F	G
2							
3		t	c				
4	ربح الوحدة	3	4				
5	عدد الوحدات المنتجة (t,c)	8	18				
6	اجمالي الارباح (دالة الهدف)	24	72	المجموع	96		
7							
8							
9	القيد الاول (قيد الاخشاب)	15	10	≤	300	300	الطرف الأيمن (الحد الاعلى للقيد الاول)
10	القيد الثاني (ساعات العمل)	2.5	5	≤	110	110	الطرف الأيمن (الحد الاعلى للقيد الثاني)

وهي قيمة عدد الوحدات المنتجة من t وهي 8 وحدات ومن c 18 وحدة. وكذلك دالة الهدف تساوي 96 وهي نفس النتائج التي تحصلنا عليها باستخدام جدول السمبلكس.

حل مثال البرمجة الخطية باستخدام (QSB)

يعتبر برنامج Qsb من البرامج التي تستخدم في تطبيقات بحوث العمليات وحل المشاكل التي تواجه الإدارة.

وفي هذه الصفحات سوف نحاول التعرف على استخدام هذا البرنامج في حل المشاكل والمواضيع التي سوف تدرس في مقرر علم الإدارة والمواضيع هي:

أولا: تثبيت البرنامج

يمكن تثبيت برنامج qsb بإدخال القرص المدمج (CDRom) في سواقة القـرص المدمج (CDRom Drive) ثم الانتقال إلى

ابدأ start

تشغيل Run

استعراض Browse

واختيار القرص المضغوط CDRom

ثم الذهاب الى المجلد winqsb

ثم النقر على setup.exe وإتباع التعليمات

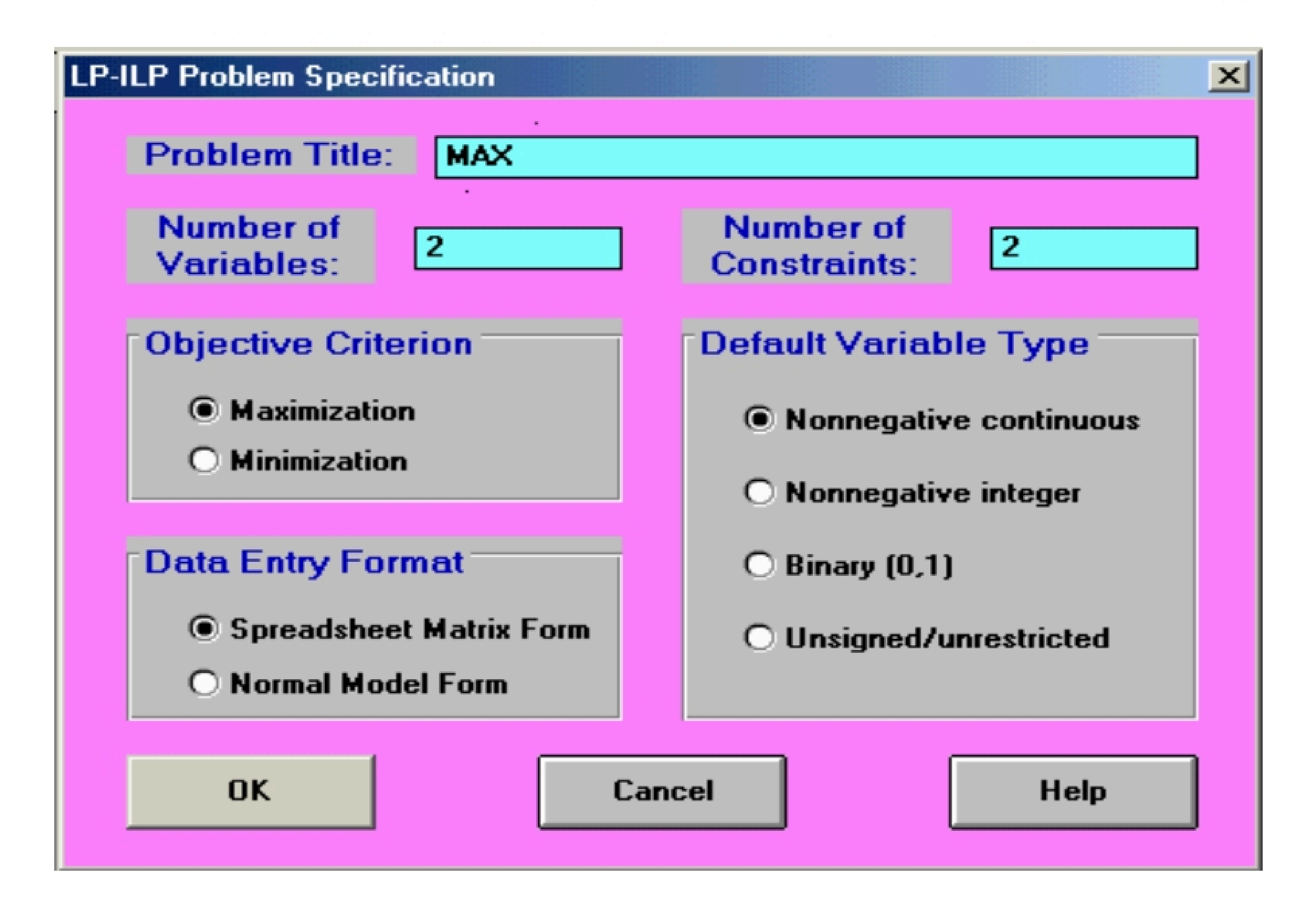
ثانيا: البرمجة الخطية وبرمجة الأعداد الصحيحة. Linear and Integer Programming

ولحل هذه المشكلة باستخدام برنامج Qsb هي كما يلي:

(حل مثال شركة الأويسط السابق).

- من ابدأ نختار برامج ثم WinQsb تظهر لنا قائمة بالبرامج التي يحتويها برنامج Qsb.

- مـن قائمـة برنـامج Qsb نختـار برنـامج Linear and Integer Programming بالضغـط عليه تظهر لنا واجهة البرنامج ولإدخال بيـانات المشكـلة - اسم المـشكلة ؛ عـدد المتغيرات ؛ عدد القيود - نختار File ثم New Problem أو باستخدام الـزر ؛ بعد استخدامهما تظهر لنا نافذة حوار كما يلي:



- تحتوي النافذة على عنوان المشكلة (Problem Title) وعدد المتغيرات (Number of Variables) وعدد القيود (Number of Constraints)؛ بعد كتابة البيانات نحدد نوع المشكلة (Objective Criterion) هل هي تعظيم (Maximization) أم تخفيض (Minimization)؛ وقد تم اختيار المشكلة تعظيم.
- بعد ذلك يتم تحديد نوع المتغير (Default Variable Type) هل هو:

الناتج يقبل فيه الكسور والأرقام الصحيحة (البرمجة الخطية Nonnegative Continuous.

أو الناتج يقبل فيه الأرقام الصحيحة (برمجة الأرقام التامة Nonnegative Integer.

أو أيضا حل المشاكل الصفر – واحد (أمثل أو غير أمثل) (Binary 0,1) .

• بعد ذلك يتم تحديد كيفية إدخال المعلومات (Data Entry Format) هـل هـي عن طريق:

مصفوفة الجـداول(Spread Sheet Matrix Form) أو عـلى شـكل نمـوذج عـادي (Normal Model Form)

بعد ذلك يتم الضغط على Ok؛ يظهر لنا جدول يـتم فيـه إدخـال قـيم المـشكلة كتالي:

Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Maximize	3	4		
C1	15	10	<=	300
C2	2.5	5	<=	110
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

بعد تعبئة الجدول يتم اختيار (Solve and Analyze) ثم (Solve the Problem)؛

بعد اختيارها يتم الحصول على نافذة النتائج ؛ من نافذة النتائج نجد أن:

$Z = 96$ ؛ $X2 = 18$ ؛ $X1 = 8$

*** ملاحظة:**

يمكن رسم المشكلة بيانياً عن طريق اختيـار الـزر مـن شريـط الأدوات ؛ باختيارنا له تظهر لنا نافذة حوار يتم من خلالها تحديد الخط (المتغير) الأفـقي والخـط (المتغير) الرأســي ثم يتم الضغط على Ok ؛ نحـصل عـلى الرسـم البيـاني مـع تحديـد النقطة المثلى.

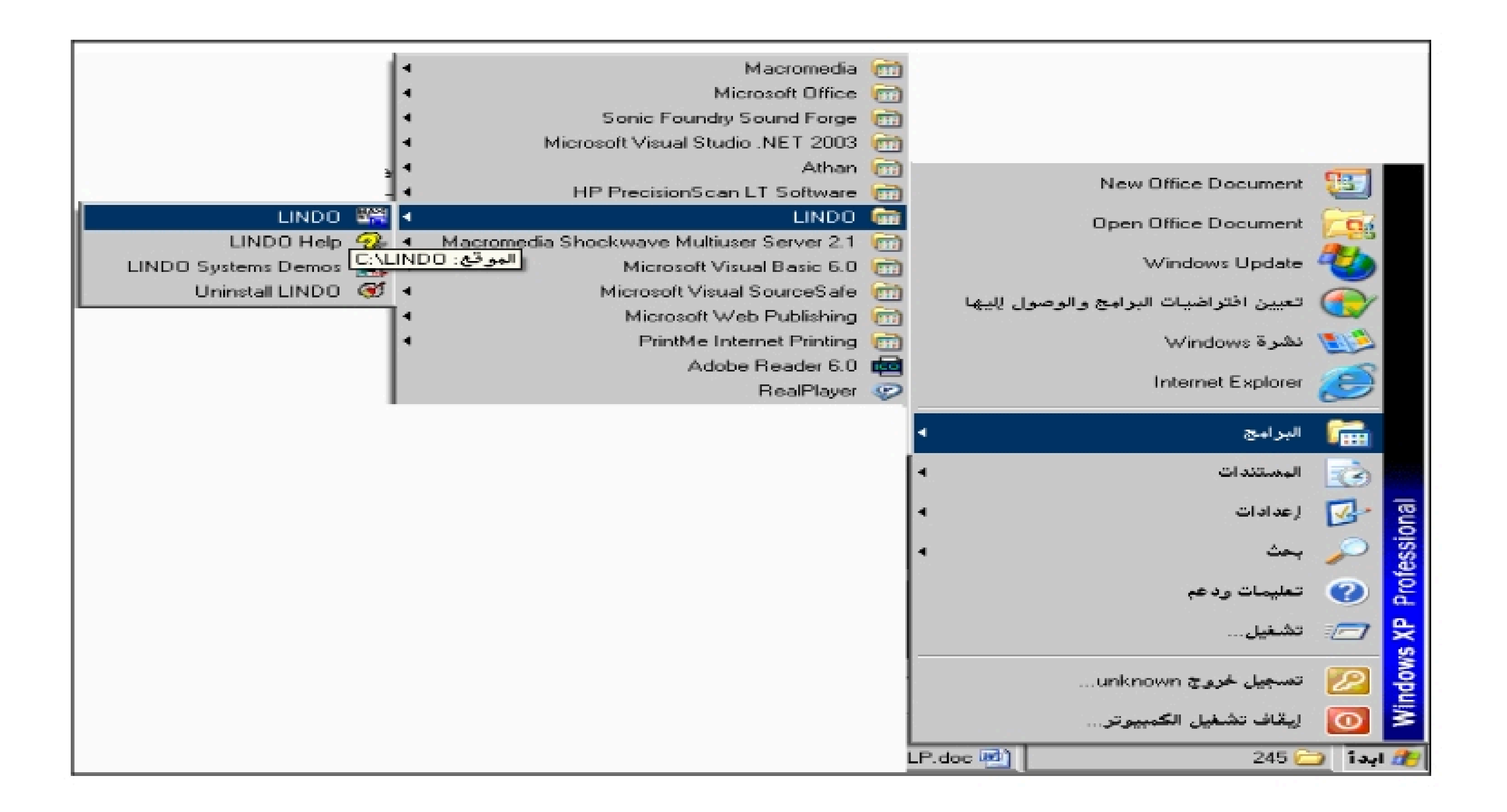
حل مشاكل البرمجة الخطية باستخدام (Lindo)

أتى اسم ليندو (Lindo) من أوائل الكلـمات (Linear, Interactive, and Discrete Optimizer). وهو يعد من أشهر وأقوى البرامج المتخصـصة في حـل مـشاكل البرمجـة

الرياضة (البرمجة الخطية "Linear Programming" وبرمجة الأعداد الصحيحة "Integer Programming" والبرمجة الهدفية "Goal Programming" والبرمجة متعددة الأهداف "Multi-Objectives" والبرمجة غير الخطية "Nonlinear Programming" و البرمجة الديناميكية "Dynamic Programming"). وقد يستخدم في حل المشاكل الأخرى مثل مشكلة النقل والتخصيص وتحليل الشبكات ولكن بعد أن يحول شكل المشكلة إلى شكل الصياغة الرياضة.

وما يميز هذا البرنامج هو سهولة الاستخدام حيث يمكن نسخ المشكلة بالشكل المعتاد وبالصياغة الرياضية المناسبة ولصقها في نافذة البرنامج أو يمكن كتابتها مباشر على نافذة البرنامج كما تكتب في محرر النصوص وغيره.

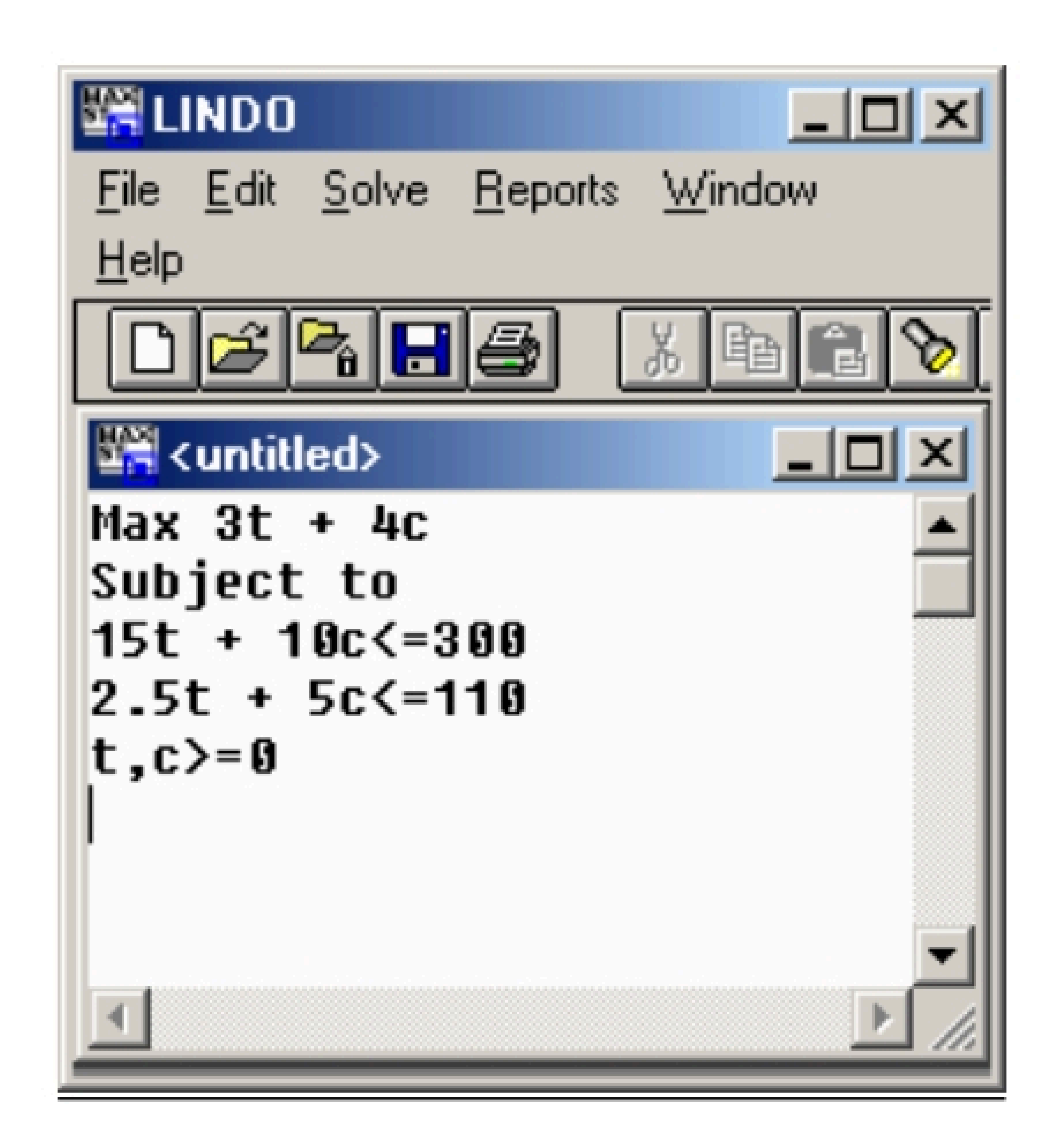
ومما بجدر ذكره أن البرنامج متوفر على الإنترنت يمكن تنزيله من موقع الشركة (www.lindo.com). بعد تنزيل البرنامج وتثبيته يمكن الانتقال إليه وتشغيله تمهيداً لحل مشكلة البرمجة الخطية باستخدامه كما في الشكل التالي:



لحل مشكلة الأويسط السابقة باستخدام ليندو (Lindo) ينبغي علينا كتابتها بالشكل التالي:

Max 3t + 4c
Subject to
15t + 10c <= 300
2.5t + 5c <= 110
t,c >= 0

لاحظ أننا استبعدنا بعض الرموز الإضافية لدالة الهدف كـ (Z=) وكذلك استبدلنا الاختصار (s.t.) بكتابة الشرط كاملا (Subject to) وكذلك استعضنا بكتابة رمز أقل من أو يساوي بالشكل (<=) وكذلك رمز الأكبر من أو يساوي بالشكل (>=) كما في الشكل التالي:



الآن أصبحت المشكلة جاهزة للحل بواسطة البرنامج وكل ما علينا فعله الآن هو الانتقال إلى قائمة الحل (solve) واختيار حل المشكلة كما في الشكل التالي:



وبعد اختيار أمر الحل فإن نافذة تخبرنا بانتهاء الحل تخرج تلقائيا إلا إذا كان هناك أي أخطاء تتعلق بخطأ في كتابة المشكلة أو لا يوجد حل للمشكلة أو أي أخطاء أخرى نتيجة عيوب في البرنامج أو نظام النوافذ.

وهنا نجد أن البرنامج قد وجد حلا امثلا للمشكلة (Status: Optimal) ومن خلال خطوتين فقط (iterations: 2) وكانت قيمة دالة الهدف هي 96 ريال (Objective:96) وهي نفس القيمة التي حصلنا عليها من قبل باستخدام جدول السمبلكس أو استخدام برامج الحاسب الأخرى كما توضحه النافذة التالية:

LINDO Solver Status

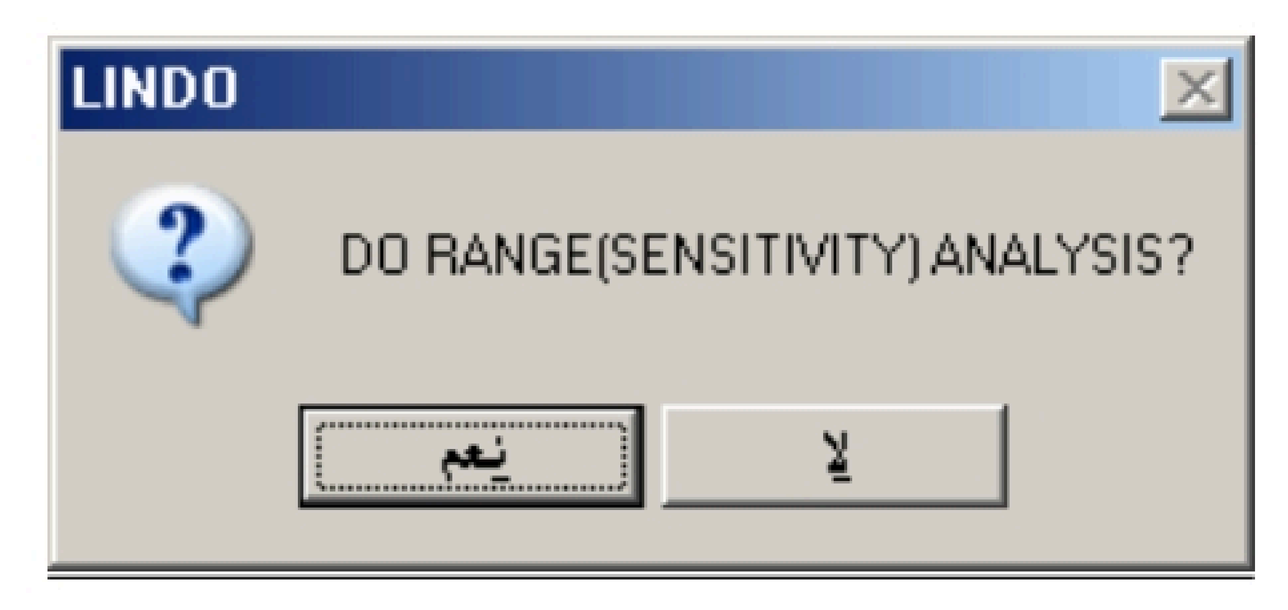
Optimizer Status

Status:	Optimal
Iterations:	2
Infeasibility:	0
Objective:	96
Best IP:	N/A
IP Bound:	N/A
Branches:	N/A
Elapsed Time:	00:00:00

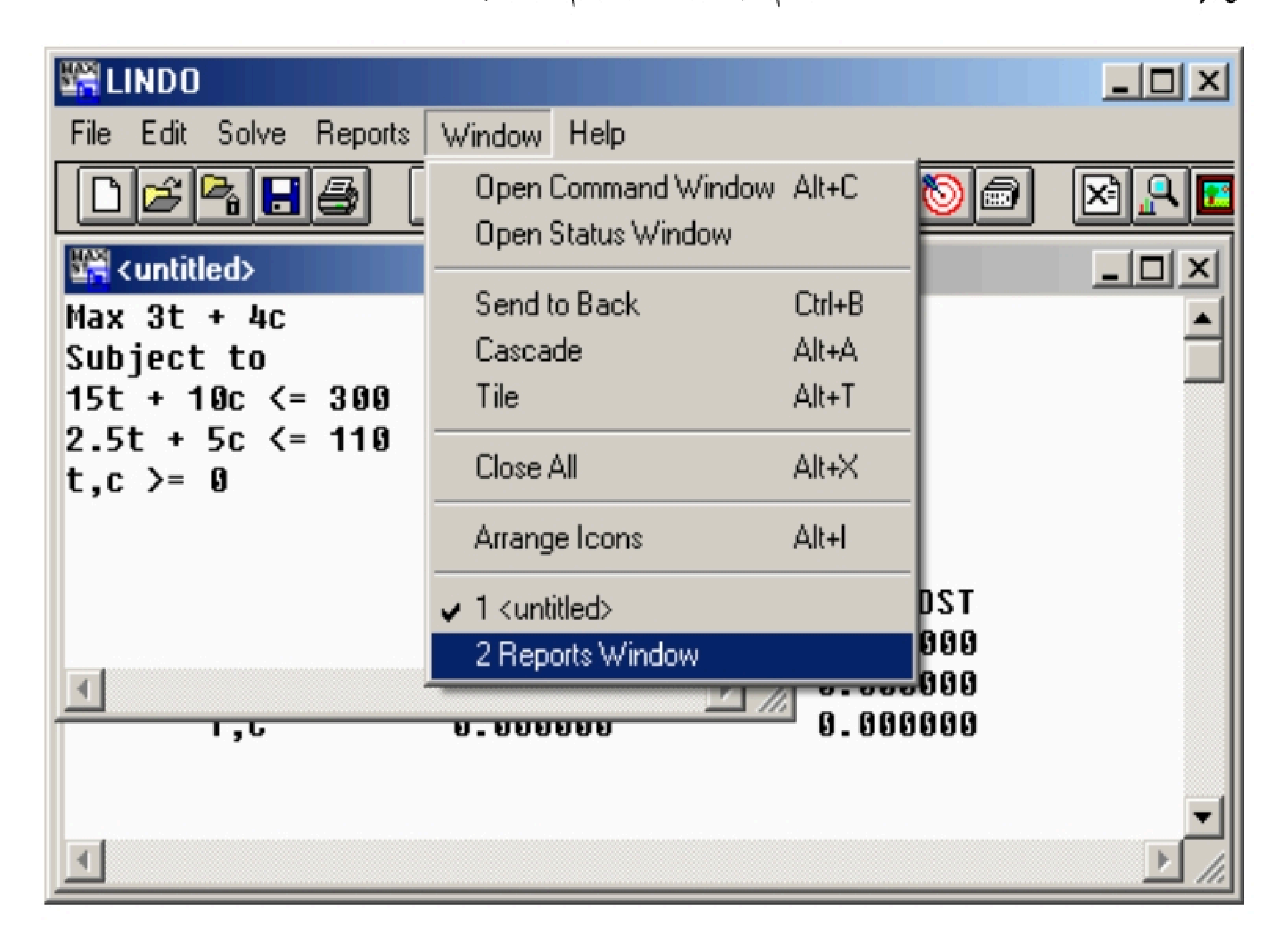
Update Interval: 1

Interrupt Solver   Close

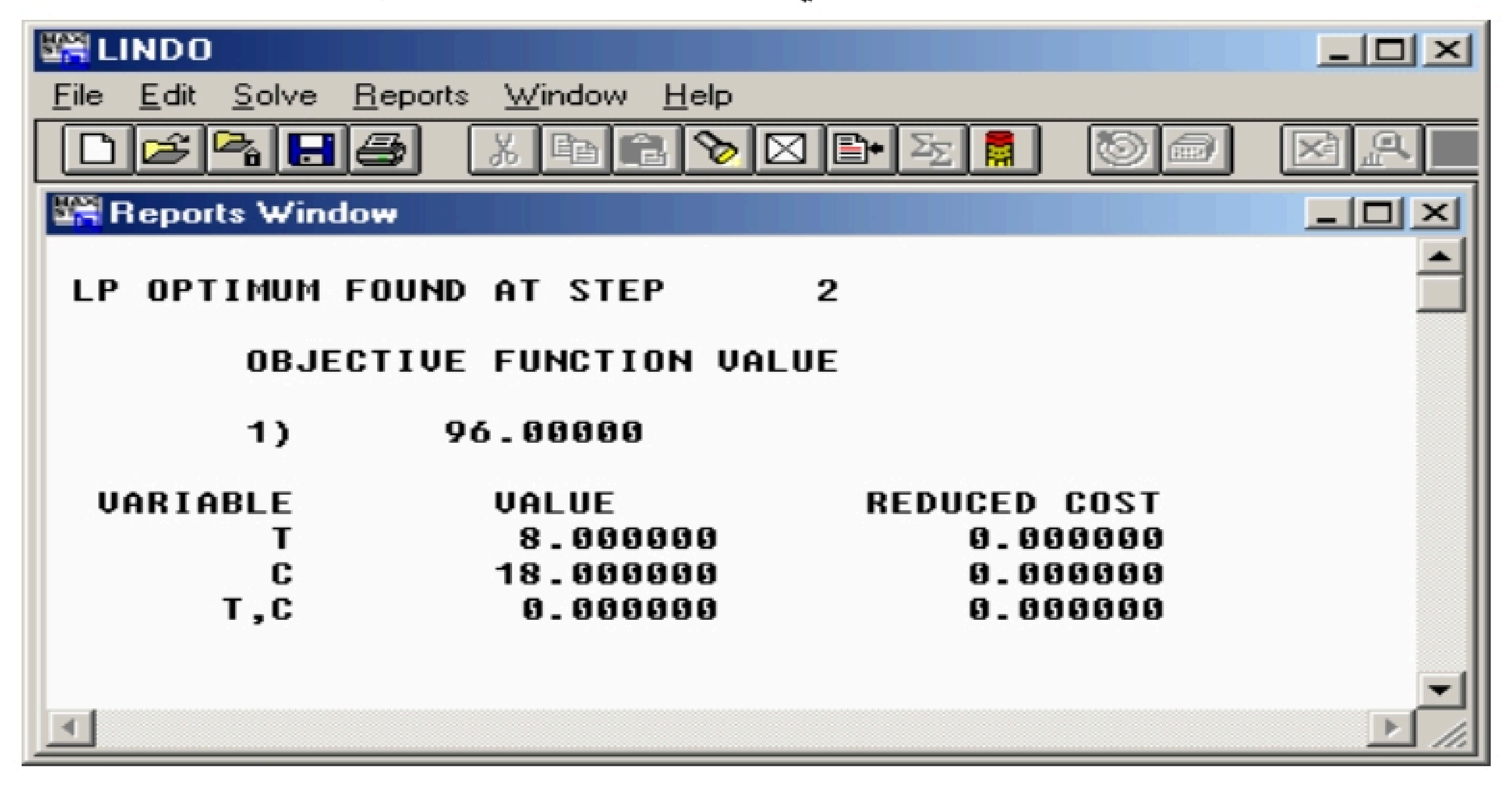
كذلك فإن البرنامج يطلب من المستخدم تحديد ما إذا كان يرغب في الحصول على تحليلات إضافية للمشكلة كتحليل الحساسية (Sensitivity Analysis) أم لا. وهذا يتوقف على حاجة كل مستخدم يستخدم هذه البرنامج لحلول مشاكله كما في النافذة التالية:



بعد ظهور النوافذ السابقة والتي تخبر المستخدم بحل المشكلة يمكن الانتقال إلى الصفحة الخاصة بالحل من قائمة الإطار window وهي صفحة تقارير الحل (Reports Window) كما في الشكل التالي:



بعدها ننتقل إلى صفحة الحل وهي تبدو كما في الشكل التالي:



ويتضح منها قيمة دالة الهدف وقيمة العنصر T والعنصر C وكذلك التحليلات التفصيلية الأخرى تتبع هذه النتيجة.

حلول مسائل البرمجة الخطية

1- نرمز لعدد مرات الإعلان في التلفزيون (صباحي) و(مسائي) والإنترنت والجرائد هي x_1 وx_2 وx_3 وx_4 على التوالي:

$\text{Max } 8x_1+7x_2+5x_3+6x_4$ (دالة الهدف)

s.t.

$4000x_1+75000x_2+300x_3+15000x_4 \le 800000$ (قيد الإنفاق)

$4000x_1+90000x_2+80000x_3+50000x_4 \ge 500000$ (قيد عدد العملاء)

$40000x_1+75000x_2 \le 500000$ (قيد تكلفة الإعلان عن طريق التلفزيون)

$x_1 \ge 3$ (عدد مرات الإعلان في التلفزيون الصباحي)

$x_3 \ge 5$ (عدد مرات الإعلان في الإنترنت)

$x_3 \le 10$ (عدد مرات الإعلان في الإنترنت)

$x_1,x_2,x_3,x_4 \ge 0$

2-نفترض أن:

عدد الأسهم المطلوب شرائها من أسهم الشركة الزراعية هو: X_1

عدد الأسهم المطلوب شرائها من أسهم شركة سابك هو: X_2

عدد الأسهم المطلوب شرائها من أسهم شركة الأدوية هو: X_3

$\text{Max. } z=7x_1+5x_2+5.5x_3$

s.t.

$60x_1+50x_2+20x_3 \le 100000$

$60x_1 \le 60000$

$50x_2 \le 25000$

$55x_3 \le 30000$

$x_1,x_2,x_3 \ge 0$

3- نفترض أن:

عدد القواعد المصنّعة (bm) عدد القواعد المشتراة (bp)

عدد الكاترج التجاري المصنع (fcm) عدد الكاترج التجاري المشترى (fcp)

عدد الكاترج الهندسي المصنع (tcm) عدد الكاترج الهندسي المشترى (tcp)

عدد الأغطية التجارية المصنعة(ftm) عدد الأغطية التجارية المشتراة (ftp)

عدد الأغطية الهندسية المصنعة(ttm) عدد الأغطية الهندسية المشتراة (ttp)

Min 0.5 bm+0.6bp+3.75fcm+4fcp+ 3.3tcm+3.9tcp+
0.6ftm+0.65ftp+0.75ttm+0.78ttp+9Ot
s.t.
bm+bp=5000
fcm+fcp=3000
tcm+tcp=2000
ftm+ftp=3000
ttm+ttp=2000
Ot≤50
bm+3fcm+2.5tcm+ftm+1.5ttm≤ 12000+06Ot

-4

min z= 5x11 + 6x12+8x13+8x21+7x22+10x23
s.t.
x11+x12+x13≤ 10000
x21+x22+x23≤ 10000
x11+x21≥6000
x12+x22≥8000
x13+x23≥5000

-5

Max 0.073A+0.103J+0.064N+0.075R+0.045G
Subject to:
A+J+N+R+G ≤ 100, 000
A+J ≤ 50 000
N+R ≤ 50 000
-0.25 N – 0.25 R+ G ≥ 0 → G ≥ 0.25 N + 0.25 R
-0.60 A + 0.40 j ≤ 0 → J ≤ 0.60 (A+J)
A, J,N,R,G ≥ 0

-6

Max $26 x_1 + 28 x_2$
s.t.
$0.9 x_1 + 1.3 x_2 \leq 670$
$0.7 x_1 + 0.6 x_2 \leq 520$
$x_1, x_2 \geq 0$

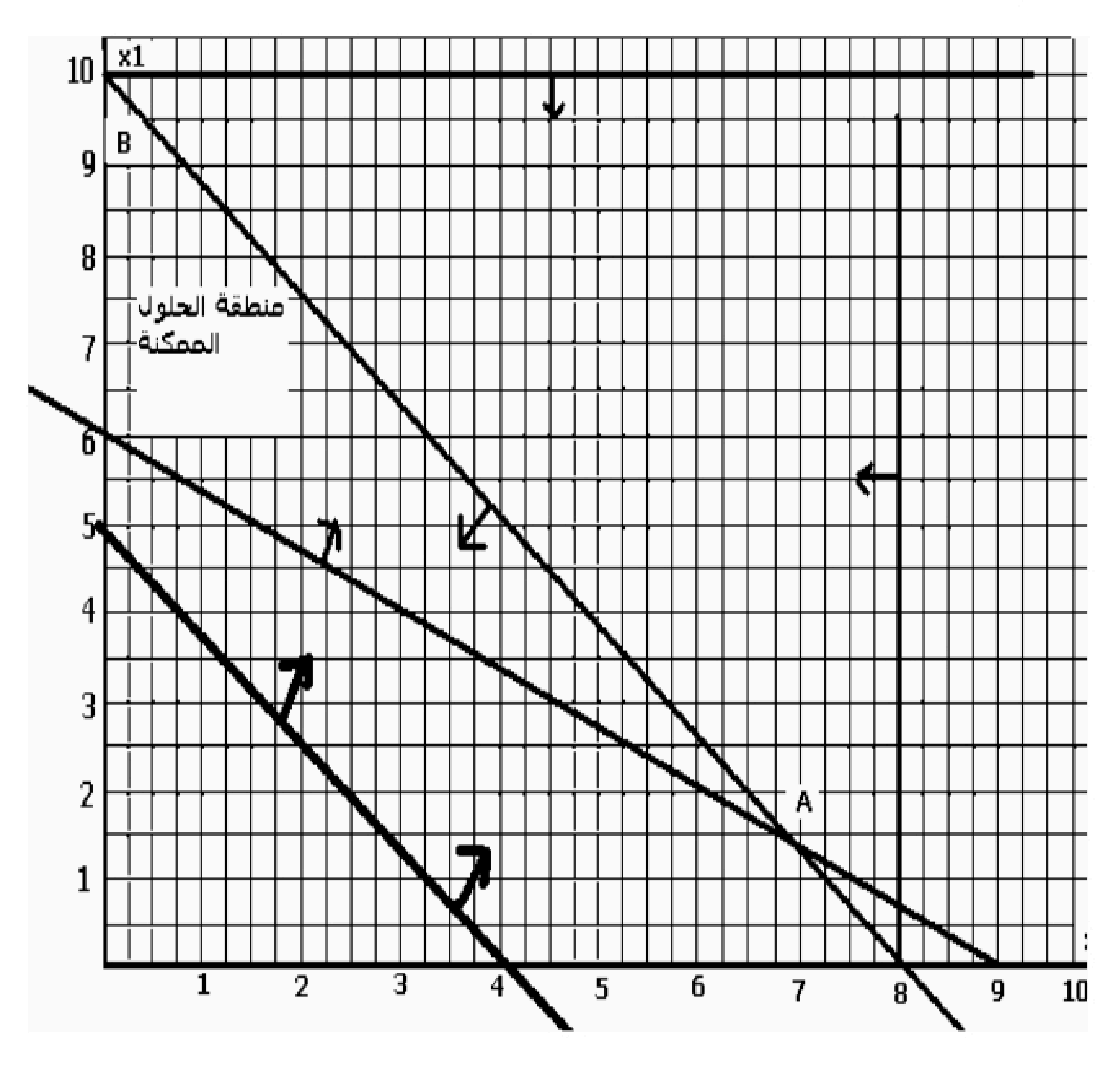
7- نرمز بالرمز x1 لعدد البيتزاء العادية و x2 لعدد البيتزاء الديلوكس

Max $x1+1.5x2$
$X1 + x2 \leq 150$
$0.4x1 +0.8 x2\leq 50$
$x1 \geq 50$
$x2 \geq 25$
$x1, x2 \geq 0$

8- الحل:

أولا: يتم التخلص من السالب بعد ضربه في −1 ثم تتغير علامة الأقـل مـن أو يساوي إلى أكبر من أو يساوي

ثانيا: يوجد حلول متعددة وقيم x1 وx2 المثلى هي جميع قيم النقاط الواقعة عـلى الخط A إلى B ودالة الهدف أو أقصى أرباح ممكنه هي 80 بعد التعويض بـأي نقطـة عـلى هذا الخط في دالة الهدف.



يتضح من الرسم السابق أن خط دالة الهدف موازي للقيـد الأول حيـث يتجـه إلى اليمين حتى ينطبق على خط القيد الأول وبذلك تكون جميع النقاط التي بين الزاوية A إلى الزاوية B كلها تمثل نقاط حلول مثلى تؤدي إلى نفس الربح.

9- الحل:

X1=……-22……., X2=………0………..,S1=……80…………………, S2=……0…………..

المتغير الداخل =………x2……، المتغير الخارج=…………s1……، دالة الهدف=……………88……

الحل السابق غير امثل ويكون الجدول التالي:

	constant	S1	S2
z	96	-1/10	-0.6
X2	+8	-1/10	/102
X1	−26	.05, 1/200	-0.3

10- الحل غير أمثل ويمكن إكمال الجدول كالتالي:

ربح الوحدة الواحدة unit cost	المتغيرات الأساسية	3	8	0	0	0	0	-M	عمود الحل	Exchange ratio معدل التغيير
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	a_1		
0	s_1	2	4	1	0	0	0	0	1600	400
0	s_2	6	2	0	1	0	0	0	1800	900
0	s_3	0	1	0	0	1	0	0	350	350
-M	a_1	1	1	0	0	0	-1	1	300	300
unit sacrifice row	تضحية الوحدة الواحدة	-M	-M	0	0	0	M	-M	الربح -300M	
Improvement row	كسب الوحدة الواحدة	3+M	8+M	0	0	0	-M	0		

من الجدول السابق:

المتغير الداخل: x2 المتغير الخارج = s2 قيمة عنصر المحور (الارتكاز)= 2

الربح = -300m

X_1=0 x_2=0 s_1= 1600 s_2=400 s_3=350
s_4=0 a_1=300

جدول السمبلكس الثاني:

ربح الوحدة الواحدة **unit cost**	المتغيرات الأساسية	**3**	**8**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-M**	عمود الحل	**exchange ratio** معدل التغيير
		x_1	**x_2**	**s_1**	**s_2**	**s_3**	**s_4**	**a_1**		
0	s_1	-2	0	1	0	0	4	-4	400	
0	s_2	4	0	0	1	0	2	-2	1200	
0	s_3	-1	0	0	0	1	1	-1	50	
8	x_2	1	1	0	0	0	-1	1	300	
unit sacrifice row	تضحية الوحدة الواحدة	8	8	0	0	0	-8	8	الربح= 2400	
Improvement row	كسب الوحدة الواحدة	3-8	0	0	0	0	8	-M-8		

11- الحل

Dual Problem:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } z= \; & 500x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 8x_4 \\
\text{s.t.} \; & 400x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 50 \\
& 200x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 20 \\
& 150x_1 + 4x_3 + x_4 \leq 30 \\
& 500x_1 + 4x_3 + 5x_4 \leq 80 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

الفصل الثاني

مشكلة النقل والتخصيص

TRANSPORTATION AND ASSIGNMENT PROBIEM

مقدمة

قلنا فيما سبق أنه يوجد تطبيقات كثيرة من الممكن أن تصاغ وتحل باستخدام البرمجة الخطية. ولكن بعض هذه التطبيقات سيكون حلها أفضل باستخدام أساليب أخرى زيادة على البرمجة الخطية. من هذه المشاكل مشكلة النقل.

أولاً: مشكلة النقل

تعريف: شركة تنتج مُنتج معين في عدة مصانع موزعة على عدة مدن ولتكن (M). هذا المُنتَج يراد تصديره إلى عدة مخازن أو مراكز للتوزيع ولتكن (N). كل مصنع من هذه المصانع له طاقة إنتاجية معروفة ومحددة وكل مخزون أو مركز توزيع له طلب معين ومحدد. إذا كانت تكلفة نقل وحدة واحدة (كرتون، صندوق، سيارة،... إلخ) معروفة فإن هدف المشكلة هو نقل هذه الكميات من مصادر الإنتاج (المصانع... مثلاً) إلى مراكز الطلب (مراكز التوزيع... مثلاً) بأقل تكلفة إجمالية ممكنة.

لنفرض أنه يوجد عندنا المثال التالي:

شركة العاير للنقل تقوم بتكرير البترول ونقلـه مـن المنطقـة الـشرقية إلى مراكـز التوزيع في كلا من المنطقة الوسطى والغربية. يوجد عند الشركة 3 منـاطق إنتاجيـة و4 مناطق لاستهلاكه وتوزيعه. جـدول الإنتـاج والطلـب والتكلفـة معطـاة في الجـدول التالي:

موقع المصنع	الإنتاج (العرض)
الدمام	50
الظهران	30
الجبيل	70
الإجمالي	150

المستودعات (مراكز التوزيع)	الطلب
مكة	30
المدينة	60
جدة	20
الرياض	40
الإجمالي	150

جدول تكلفة النقل للوحدة الواحدة (ناقلة واحدة):

من / إلى	مكة	المدينة	جدة	الرياض
الدمام	150	180	190	130
الظهران	200	140	150	170
الجبيل	250	120	170	220

المطلوب معرفة التوزيع الأمثل لنقل هذه الكميات المنتجة في الشرقية إلى مراكز التوزيع المختلفة بأقل تكلفة ممكنة.

ملحوظة: مع أن هذه المشكلة من الممكن صياغتها ثم حلها بطريقة البرمجة الخطية السابقة إلا أننا سنرى أنه من الأفضل حلها بطريقة مشكلة النقل " Transportation Problem" وهي طريقة عملت خصيصا لتحل المشاكل من هذا النوع.

قبل شرح خطوات الحل يجب أن نوضح شكل جدول النقل "Transportation Tableau" ومكوناته الأساسية.

جدول النقل

لإظهار البيانات في شكل واضح ولتبسيط الإجراءات والحسابات الضرورية يجب أن نضع هذه البيانات في جدول .

هذا الجدول يتكون من 6 عناصر:

1- مصادر الإنتاج (المصانع .. وغيرها).

2- الإنتاج (الكمية المنتجة...).

3- مراكز التوزيع (مستودعات، مخازن ...).

4- الطلب.

5- تكلفة النقل.

6- الكمية المنقولة.

الجدول التالي يبين الشكل العام لجدول النقل:

إلى To \ From\ من	مراكز التوزيع Destinations			العرض Supplies
	الكمية المنقولة Shipping allocation	تكلفة النقل Shipping cost		
المصادر Sources				
Demands الطلب				الإجمالي Totals

ويلاحظ من الجدول أن كل خلية من خلايا المصدر وكذلك مركز التوزيع قد قسمت إلى قسمين. في الجزء العلوي توجد تكلفة نقل الوحدة وفي الأسفل توجد الكمية المنقولة. ووجود صفر (أو فراغات) في خانة الكمية المنقولة يدل على أنه لم تنقل أي كمية من ذلك المصدر أو المصنع إلى ذاك المركز أو المستودع. هذه الفراغات ستستخدم في الوصول لحلول أخرى قد تكون أقل تكلفة.

الجدول التالي يبين جـدول النقـل "Transportation Tableau" لـشركة العـاير لنقليـات البترول.

إلى \ To من \ From	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150	180	190	130	50
الظهران	200	140	150	170	30
الجبيل	250	120	170	220	70
Demands الطلب	30	60	20	40	150

يلاحظ من الجدول أن كمية الإنتاج (العـرض) وكميـة الطلـب متـساويتين. في حالات أخرى قد لا تتساوى الكميتين وهذا سنتطرق إليه مستقبلاً إن شاء الله.

إيجاد الحل المبدئي الممكن

1- طريقة الركن الشمالي الغربي "The northwest-corner technique "

2- طريقة أقل تكلفة "The minimum-cost technique "

3- طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximation Method (VAM)

1- طريقة الركن الشمالي الغربي

لإيجاد الحل المبدئي باستخدام الطريقة يجب اتباع الخطوات التالية:

أ) ابدأ بالخلية التي تقع في أقصى الركن الشمالي الغربي.

ب) قارن العرض والطلب لهذه الخلية وضع الكمية الأقل منهما، وضع دائرة على هذه الكمية المنقولة واطرح الكمية هذه من كلا الطرفين. في مشكلة النقل السابقة يوجد عرض 50 ناقلة وطلب 30 ناقلة من البترول، ولذلك نحن نخصص 30 ناقلة في هذه الخانة.

الجدول الأول: تعبئة خلية الدمام – مكة

إلى \To من \From	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 30	180	190	130	20~~50~~
الظهران	200	140	150	170	30
الجبيل	250	120	170	220	70
Demands الطلب	~~30~~ 0	60	20	40	150

ج) إذا كانت الخلية المخصصة لها الكمية السابقة هي الخلية الواقعة في أقصى الزاوية الجنوب شرقية نتوقف عند هذا الحد. فيما عدا ذلك أكمل الخطوات التالية.

د) اذهب إلى الخلية المجاورة حسب الشروط التالية:

- إذا كان العرض أكبر من الطلب، إذا تحرك في نفس الصف

- إذا كان العرض أقل من الطلب تحرك في نفس العمود.
- إذا كان العرض والطلب متساويان تحرك أفقيا باتجاه الزاوية الجنوب شرقيـة.

في المشكلة السابقة تحركنا من الدمام- مكة ثم الدمام – المدينة.

الجدول الثاني: تعبئة خلية الدمام – المدينة

الى TO: / من From	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 (30)	180 (20)	190	130	~~50~~ ~~20~~ 0
الظهران	200	140	150	170	30
الجبيل	250	120	170	220	70
Demands الطلب	~~30~~ 0	~~60~~ 40	20	40	150

الجدول الثالث: تعبئة خلية الظهران – المدينة

الى TO: / من From	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 (30)	180 (20)	190	130	~~50~~ ~~20~~ 0
الظهران	200	140 (30)	150	170	~~30~~ 0
الجبيل	250	120	170	220	70
Demands الطلب	~~30~~ 0	~~60~~ ~~40~~ 10	20	40	150

الجدول الرابع: تعبئة خلية الجبيل – المدينة

الى TO: / من From	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 (30)	180 (20)	190	130	~~50~~ ~~20~~ 0
الظهران	200	140 (30)	150	170	~~30~~ 0
الجبيل	250	120 (10)	170	220	~~70~~ 60
Demands الطلب	~~30~~ 0	~~60~~ ~~40~~ ~~10~~ 0	20	40	150

الجدول الخامس: تعبئة خلية الجبيل – جدة

الى TO: / من From	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 (30)	180 (20)	190	130	~~50~~ ~~20~~ 0
الظهران	200	140 (30)	150	170	~~30~~ 0
الجبيل	250	120 (10)	170 (20)	220	~~70~~ ~~60~~ 40
Demands الطلب	~~30~~ 0	~~60~~ ~~40~~ ~~10~~ 0	~~20~~ 0	40	150

الجدول السادس: تعبئة خلية الجبيل – الرياض

الى TO: / من From	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 (30)	180 (20)	190	130	~~50~~ ~~20~~ 0
الظهران	200	140 (30)	150	170	~~30~~ 0
الجبيل	250	120 (10)	170 (20)	220 (40)	~~70~~ ~~60~~ ~~40~~ 0
Demands الطلب	~~30~~ 0	~~60~~ ~~40~~ ~~10~~ 0	~~20~~ 0	~~40~~ 0	150

يجب أن نعلم أن عدد الخانات غير الصفرية (غير الفارغة) يجب أن تساوي عدد المصادر (M) + عدد مراكز التوزيع (N) − 1 = (M) + (N) − 1

من بين إجمالي الخلايا التي مجموعها = (M) × (N)

لذلك فإنه في مشكلة النقل السابقة يوجد هناك 3 ×4 = 12 خلية ممكن أن يوضع فيها كمية للنقل. وعدد الخانات غير الصفرية يجب أن تكون 3+4 −1 = 6 . ولذلك إذا كان عدد الخانات المعبأة أقل من 6 فإن الحل يقال له "متحلل Degeneracy" كذلك يقال له " ليس أساسي not basic ". خطوات الحل المراد شرحها لا تسمح بالحل غير الأساسي ولكن سنتعرض للحالة التي يكون فيها الحل متحلل "Degeneracy" لاحقاً إن شاء الله .

ويلاحظ أن هذه الحل المبدئي لم يأخذ بالحسبان التكلفة الإجمالية لنقل هذا المنتج. الجدول التالي يوضح الحل المبدئي وتكلفتها الإجمالية باستخدام الركن الشمالي الغربي " The northwest-corner technique "

الإجمالي	الجبيل – الرياض	الجبيل – جدة	الجبيل – المدينة	الظهران – المدينة	الدمام– المدينة	الدمام– مكة	
	40	20	10	30	20	30	الكمية المنقولة
	220	170	120	140	180	150	التكلفة
25700	8800	3400	1200	4200	3600	4500	الإجمالي

2- طريقة أقل تكلفة "The Minimum-cost Technique"

خطوات الحل:

أ) أبدأ من الخلية التي فيها أقل تكلفة نقل . إذا وجد أكثر من واحدة اختر الخلية التي تنقل بها أكبر كمية ممكنة.

ب) قارن بين المتاح من الطلب والعرض وضع الكمية الأقل وضع عليها دائـرة وخفض الطلب والعرض بهذه القيمة.

ج) إذا كان ليس من الممكن تخصيص كميات للنقل قف وهذا هو الحل المبدئي. فيما عدا ذلك نذهب إلى الخلية والتي يوجد بها أقل تكلفة نقل تالية.

في المشكلة السابقة نلاحظ أن أقل تكلفة نقـل للوحـدة تقـع في الخليـة الخاصـة بالنقل من الجبيل إلى المدينة (وهي 120 ريالاً) ويوجد 70 في خانة العرض و60 في خانة الطلب، لذلك نضع 60 ناقلة لتنقل البترول من الجبيل إلى المدينة.

من From / الى TO:	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150	180	190	130	50
الظهران	200	140	150	170	30
الجبيل	250	120 (60)	170	220	~~70~~ 10
Demands الطلب	30	~~60~~ 0	20	40	150

بعد ذلك ننتقل من الخلية الجبيل – المدينة للخلية الدمام – الرياض (تكلفة 130 ريالاً) ونقارن بين عرض 50 ناقلة مع طلب 40 ناقلة ولذلك نضع 40 في الدمام – الرياض. وهي أجمالي ما يحتاجه الرياض.

الى TO: / من From	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150	180	190	130 (40)	~~50~~ 10
الظهران	200	140	150	170	30
الجبيل	250	120 (60)	170	220	~~70~~ 10
Demands الطلب	30	~~60~~ 0	20	~~40~~ 0	150

ثم ننتقل إلى الخلية الظهران – المدينة ولكن لا نستطيع أن ننقل أي كمية؛ لأن جميع طلبات المدينة قد حددت. ولذلك نتحرك للخلايا التالية في تقليل التكلفة (150 ريالاً تكلفة النقل للوحدة) وهما خلية الدمام – مكة والظهران – جدة ونضع 20 و10 في كل منهما.

الى TO: / من From	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150	180	190	130 (40)	~~50~~ 10
الظهران	200	140	150 (20)	170	30
الجبيل	250	120 (60)	170	220	~~70~~ 10
Demands الطلب	30	~~60~~ , 0	~~20~~ , 0	~~40~~ , 0	150

يأتي الدور على الخلايا الخاصة بالظهران – الرياض والجبيل – جدة، ثم الدمام – المدينة ولكن لا نستطيع أن نخصص أي كمية في هذه الخلايا؛ وذلك لعدم سماح العرض أو الطلب في هذه الخلايا. لذلك ننتقل إلى الخلية الظهران – مكة ونخصص فيها 10 ناقلات ثم أخيرا الجبيل – مكة ونخصص فيها 10 ناقلات وبذلك يتم نقل جميع الكمية المنتجة في تلك المصانع إلى مراكز التوزيع المحتاجة.

الى TO: / من From	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 (10)	180	190	130 (40)	~~50~~ 10
الظهران	200 (10)	140	150 (20)	170	30
الجبيل	250 (10)	120 (60)	170	220	~~70~~ 10
Demands الطلب	~~30,20,10~~,0	~~60~~ , 0	~~20~~ , 0	~~40~~ , 0	150

نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة = 6 وهو الرقم المطلوب للحصول على حل ابتدائي أساسي.

الجدول التالي يوضح الحل الابتدائي بطريقة التكلفة الأقل والتكلفة الإجمالية لنقل جميع الإنتاج

	الدمام -مكة	الظهران – مكة	الجبيل – مكة	الجبيل – المدينة	الظهران – جدة	الدمام – الرياض	
الكمية المخصصة	10	10	10	60	20	40	150
تكلفة الوحدة الواحدة	150	200	250	120	150	130	
	1500	2000	2500	7200	3000	5200	21400

هنا تلاحظ أن طريقة أقل تكلفة (The minimum-cost technique) أدت إلى أقل تكلفة إجمالية مقارنة مع طريقة الركن الشمالي الغربي (The northwest-corner technique). ولكن هذا هو ليس الحالة الدائمة، حيث إنه في بعض الحالات الخاصة فإن طريقة الركن الشمالي الغربي تعطي تكاليف أقل. ولكن عموما طريقة الركن الشمالي الغربي (The northwest-corner technique) أسهل بكثير من طريقة أقل تكلفة (The minimum-cost technique) ولكن طريقة أقل تكلفة تعطي أقل تكلفة في الحل الابتدائي.

3- طريقة فوجل التقريبية (Vogel's Approximation Method (VAM

تعتبر طريقة فوجل من أهم الطرق الثلاث على الإطلاق لما تتميز به هذه الطريقة من السرعة في الوصول إلى الحل الأمثل أو الحل القريب من الحل الأمثل ونادراً ما تكون طريقتي أقل التكاليف والطريقة الشمالية الغربية أفضل من طريقة فوجل.لكن طريقة فوجل تحتاج إلى عمليات حسابية أطول مما تحتاجه طريقتا أقل التكاليف والزاوية الشمالية الغربية.

وتتلخص خطوات طريقة فوجل التقريبية كما يلي:

1-حساب الفرق بين أقل كلفتين في كل صف وفي كل عمود، وتأشير هذه الفروق على جانبي جدول الحل.

2-تحديد الصف أو العمود الذي يمتلك أكبر فرق.

3-اختيار الخلية ذات الكلفة الأقل في ذلك الصف أو العمود.

4-في الخلية التي اختيرت في الخطوة (3)نقارن احتياجات المركز مع ما هو متوفر في المصدر لنأخذ القيمة الأقل.

5-نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل من الأعمدة والصفوف ونكرر العملية السابقة إلى أن نلبي احتياجات جميع مراكز الطلب من المصادر المتاحة.

سيتم توضيح طريقة فوجل بالاستعانة بالمثال التالي:

إلى \ من	D1	D2	D3	العرض upplies	الفرق
S1	6	7	8	10	7-6=1
S1	15	80	78	15	78-15=63
Demands الطلب	15	5	5	25	الأكبر 73
الفرق	15-6=9	80-7=73	78-8=70		

- نجد الفرق في التكلفة بين أقل تكلفتين للصفوف وللأعمدة كما هو مبين في الجدول السابق.
- نلاحظ أن للعمود الثاني أكبر فرق والذي يساوي 73.
- نبحث عن أقل تكلفة في العمود الثاني، فنجد أن للخلية (S_1, D_2) أقل كلفة والبالغة 7.
- نقارن احتياجات مركز الطلب D_2 مع الكمية المتاحة في المصدر S_1 ثم نختار أقل الكميتين. Min (10,5) = 5.

إلى \ \ من	D1	D2	D3	العرض Supplies	الفرق
S1	6	7 5	8	10-5=5	7-6=1
S2	15	80	78	15	78-15=63
Demands الطلب	15	5-5=0	5	25	
الفرق	15-6=9	80-7=73	78-8=70		الأكبر =73

• ويتم تعديل العرض والطلب في الجدول السابق، وهذه العملية تؤدي إلى تلبية كامل احتياجات المركز D_2، لذا يشطب المركز D_2 من الجدول لغرض إعادة حساب الفروق بين التكاليف مرة أخرى.

• يتم حساب الفرق في الكلفة لكل صف وعمود في الجدول السابق.

• نلاحظ أن العمود الثالث (D3) أعلى فرق في الكلفة ويساوي 70.

• نبحث عن أقل تكلفة في العمود الثالث، فنجد أن للخلية (D_3,S_1) أقل كلفة والبالغة 8.

• نقارن احتياجات مركز الطلب D3 مع ما هو متاح من كميات لدى المصدر S1، ثم نختار أقل الكميتين. Min (5.5) = 5.

يتم شطب مركز الطلب D2 كما في الجدول التالي:

إلى \ من \	D1	D2	D3	العرض Supplies	الفرق
S1	6	7 5	8 5	5-5=0	8-6=2
S2	15	80	78	15	78-15 = 63
Demands الطلب	15	0	5	25	
الفرق	15-6=9	xxxxxxxxx	78-8=70		الأكبر =70

وبعد شطب العمود الثالث (D3) والصف الأول (S1) وكتابة الجدول من جديد ينتج:

إلى \ \ من	D1	D2	D3	العرض Supplies	الفرق
S1	6	7 / 5	8 / 5	0	Xxxxx
S2	15	80	78	15	
Demands الطلب	15	0	0	25	
الفرق		xxxxxxx	xxxxxxx		

عند مرحلة الحل هذه لا نحتاج لحساب الفرق في الكلفة للصفوف والأعمدة بسبب وجود خلية واحدة (D1,S2) ومركز واحد فقط وهو (D1) والذي لم يحصل على احتياجاته حتى الآن.

إن ما نحتاجه هنا البحث عن أقل كلفة في العمود الأول، والذي نلاحظ فيه أن المصدر S_2 يقابل أقل كلفة والتي تساوي 15 لذا سيتم تخصيص كامل محتويات المصدر S_2 لتلبية جزء من احتياجات مركز الطلب D_1، ويتم إلغاء المركز S_2. .

وبوضع أكبر كمية ممكنة في هذه الخلية وهي min(15,15)=15 نجد أن جدول الحل الأساسي الأول هو كما يلي:

إلى \ \ من	D1	D2	D3	العرض Supplies	الفرق
S1	6	7 5	8 5	0	xxxxx
S2	15 15	80	78	0	xxxxx
Demands الطلب	0	0	0	25	
الفرق	xxxxxxx	xxxxxxx	xxxxxxx		

اختبار أمثلية الحل الأولي

إن الحصول على الحل الأساسي الأولي لا يعني نهاية المشكلة وإنما يجب أن تستخدم أساليب أخرى لاختبار ما إذا كان الحل الأساسي الذي تم الحصول عليه من تطبيق إحدى الطرق السابقة هو الحل الأمثل، أي الحل الوحيد الذي لا يمكن إيجاد حل أفضل منه أم أن هناك حلولاً أمثل منه؟ هنا طريقتان لاختبار أمثلية الحل هما:

1- طرقة المسار المتعرج The Stepping Stone Method

2- طريقة التوزيع المعدلة (MODI) Modified Distribution Method

1- طريقة المسار المتعرج The Stepping Stone Method

تقضي طريقة المسار المتعرج بتقييم جميع الخلايا غير المشغولة (الفارغة) في جدول (الحل الأولي) لمعرفة أثر استخدام كل خلية فارغة على مجموع التكاليف ويتم ذلك من خلال عمل مسار مغلق لكل خلية فارغة.

وإذا وجدنا أن ملء خلية معينة فارغة سيؤدي إلى تقليل تكاليف النقل فإن جدول النقل يتم تعديله للاستفادة من ذلك. وتستمر عملية تقييم كل جدول نقل إلى

أن يتضح أن شغل أي خلية فارغة لن يؤدي إلى تقليل تكاليف النقل بل سيؤدي على زيادتها.

القواعد الواجب مراعاتها عند تكوين المسار المغلق:

1- يجب أن يبدأ وينتهي المسار المغلق عند الخلية الفارغة المراد تقييمها.

2- يجب أن يتألف المسار المغلق من مجموعة من المستقيمات الأفقية والعمودية بحيث تقع الخلايا المشغولة عند الزوايا القائمة للمسار المغلق.

3- وجود مسار مغلق واحد لكل خلية غير مشغولة.

4- نقوم بحساب التكلفة غير المباشرة لكل خلية فارغة.

5- حتى يكون الحل أمثلاً يجب أن تكون التكلفة لكل خلية فارغة قيمة موجبة أو مساوية للصفر.

افترض أننا بدأنا بالحل الابتدائي لطريقة أقل تكلفة "The minimum-cost technique". لمعرفة ما إذا كان هناك حل أفضل (أقل تكلفة) من هذا الحل الابتدائي، فإنه يجب أن نختبر " نقيَم" كل خلية فارغة لمعرفة ما إذا كان استخدامها سيؤدي إلى تخفيض التكاليف الإجمالية للنقل.

الاختبار يشتمل على حساب صافي التغير في التكلفة (هل تنخفض أم لا) إذا خصصت كمية جديدة في هذه الخلية الفارغة. إذا انخفضت التكلفة الإجمالية نتيجة لاستخدام هذه الخلية الفارغة فإن هذه الخلية الفارغة يجب أن تكون ضمن الحل " أن تُشغل بكمية جديدة".

عملية اختبار وتقييم هذه الخلايا الفارغة هي عملية مشابهة لتحسين الحل الابتدائي في جدول السمبلكس.

الحل الابتدائي

انظر إلى جدول الحل الابتدائي بطريقة أقل تكلفة "The minimum-cost technique"

من / الى (From / TO)	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 (10)	180	190	130 (40)	~~50, 10~~, 0
الظهران	200 (10)	140	150 20	170	~~30, 10~~, 0
الجبيل	250 (10)	120 (60)	170	220	~~70, 10~~, 0
Demands الطلب	~~30, 20, 10~~, 0	~~60~~, 0	~~20~~, 0	~~40~~, 0	150

افترض أننا أردنا اختبار الخلية الدمام – المدينة وذلك بوضع وحدة واحدة في هذه الخلية فإن تكلفة الوحدة هذه سيكون 180 ريال. ولكن بإرسال وحدة "ناقلة" إضافية من الدمام إلى المدينة سيؤدي إلى زيادة إجمالي الكميات المنقولة من الدمام إلى (10 + 40 +1 = 51) وكذلك زيادة إجمالي الكميات المنقولة للمدينة إلى 61 (60 +1) وهذه غير ممكن. لأن مصنع الدمام لا يستطيع إنتاج أكثر من 50 ناقلة ولا المدينة تستطيع استيعاب أكثر من 60 ناقلة على الأكثر. لذلك فإنه لابد من مراعاة كميات الطلب والعرض المحددة.

للتأكد من عدم تغير كميات الطلب والعرض المحددة فإنه لابد من إجراء دوران "Loop" من عمليات الإضافة والتخفيض في الخانات المشغولة والخانة الفارغة الجديدة كما يلي:

نضع وحدة واحدة في الخلية الدمام - المدينة، ونتحمل تكلفة هذه الوحدة (وهي 180) كتكاليف إضافية للحل الابتدائي، ونعرِّف هذه الخلية بأنها خلية يراد زيادتها بوحدة واحدة ونضع فيها العلامة "⊕" . ولتخفيف أثر الزيادة في الخلية الدمام–المدينة فإننا نطرح وحدة واحدة من الخلية الدمام –مكة ونخصم تكلفتها البالغة 150 ريالاً للوحدة حتى لا يزيد المنقول من الدمام عن 50 ناقلة " الحد الأعلى لمصنع الدمام". ونعَرف هذه الخلية بأنها خلية يراد تخفيضها بوحدة واحدة ونضع فيها العلامة "Θ" . ولتعويض النقص الجديد في الدمام - مكة فإننا نزيد الخلية الجبيل - مكة بوحدة واحدة تكلفتها 250 ريالاً ونعرفها بالعلامة"⊕" ونخفض الخلية الجبيل - المدينة بوحدة واحدة ونوفر على أنفسنا تكلفتها البالغة 120 ريالاً ثم نعرفها بالعلامة "Θ" دليلا على تخفيظها. بذلك نكون قد انهينا الدورة وإليك الجدول التالي الذي يوضح هذه العملية:

TO من / From الى	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	Θ 150 / 10	⊕ 180	190	130 / 40	~~50,10~~,0
الظهران	200 / 10	140	150 / 20	170	~~30, 10~~ ,0
الجبيل	⊕ 250 / 10	Θ 120 / 60	170	220	~~70, 10~~, 0
Demands الطلب	~~30, 20, 10~~ ,0	~~60~~, 0	~~20~~, 0	~~40~~, 0	150

صـافي التغـير في التكلفـة: بعـد إجـراء عمليـة الـدوران الـسابقة وتحديـد الخانـات أو الخلايـا المـراد زيادتهـا أو تخفيـضها فإنـه يجـب معرفـة صـافي التغـير الـذي سـتحدثه هـذه العمليـة أو الـدورة سـواء كـان زيـادة التكـاليف أو خفـضها. الجدول التـالي يوضـح صـافي التغـير في التكلفـة الإجماليـة بوضـع وحـدة واحـدة في الخلية الدمام المدينة.

الإجمالي	التغير في التكلفة		التغير في الكمية المنقولة		
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
+180		+180	1	0	الدمام – المدينة
-150	-150		9	10	الدمام –مكة
+250		+250	11	10	الجبيل – مكة
-120	-120		59	60	الجبيل – المدينة
+160	-270	+430	80	80	صافي التغير

لذلك فإن صافي التغير هو زيادة في التكلفـة الإجماليـة بمقـدار 160 ريـالاً لكـل وحدة منقولة باستخدام هذه الخلية. ونستنتج أن نقل أي كميـة مـن الـدمام – المدينـة سيكون غير أمثل.

نضع الرقم 160 " الذي هو صافي التغير في التكلفـة الإجماليـة نتيجـة اسـتخدام هذه الخلية" داخل الخلية ولكن بدون دائرة ليسهل تمييزه.

TO من / From الى	مكـــة	المدينة	جــــدة	الريـاض	العرض Supplies
الدمام	150 (10)	180 +160	190	130 (40)	~~50, 10~~,0
الظهران	200 (10)	140	150 20	170	~~30, 10~~ ,0
الجبيل	250 (10)	120 (60)	170	220	~~70, 10~~, 0
Demands الطلب	~~30, 20, 10~~ ,0	~~60~~, 0	~~20~~, 0	~~40~~, 0	150

الحل الثاني

الآن باتباع نفس الخطوات دعنا نختبر إمكانية استخدام الخلية الدمام – جدة

لاختبار الخلية الدمام – جدة نضع وحدة واحدة في هذه الخليـة وبـذلك تكـون تكلفة الوحدة هذه سيكون 190 ريال. ولكن بإرسال وحدة "ناقلة" إضافية من الدمام إلى جدة سيؤدي إلى زيادة إجمالي الكميات المنقولة مـن الـدمام إلى (10 + 40 +1 = 51) وكذلك زيادة إجمالي الكميات المنقولة لجدة إلى 21 (20+1) وهذا غير ممكن. لأن مصنع الدمام لا يستطيع إنتاج أكثر من 50 ناقلة ولا جدة تستطيع استيعاب أكثر من 20 ناقلـة على الأكثر. لذلك فإنه لابد من مراعاة كميات الطلب والعرض المحددة.

للتأكد من عدم تغير كميات الطلب والعـرض المحـددة فإنـه لابـد مـن إجـراء دوران "Loop " من عمليات الإضافة والتخفيض في الخانات المشغولة والخانة الفارغة الجديدة هذه (الدمام – جدة) كما يلي:

نضع وحدة واحدة في الخلية الدمام – جدة، ونتحمل تكلفة هذه الوحدة (وهي 190) كتكاليف إضافية للحل الابتدائي، ونعرِّف هذه الخلية بأنها خلية يراد زيادتها بوحدة واحدة ونضع فيها العلامة "⊕" . ولتخفيف اثر الزيادة في الخلية الدمام–جدة فإننا نطرح وحدة واحدة من الخلية الدمام –مكة ونخصم تكلفتها البالغة 150 ريالاً للوحدة حتى لا يزيد المنقول من الدمام عن 50 ناقلة " وهو الحد الأعلى لمصنع الدمام". ونعرِّف هذه الخلية بأنها خلية يراد تخفيضها بوحدة واحدة ونضع فيها العلامة "Θ" . ولتعويض النقص الجديد في الدمام – مكة فإننا نزيد الخلية الظهران – مكة بوحدة واحدة تكلفتها 200 ريالاً ونعرفها بالعلامة"⊕" ونخفض الخلية الظهران – جدة بوحدة واحدة ونوفر على أنفسنا تكلفتها البالغة 150 ريالاً ثم نعرفها بالعلامة "Θ" دليلا على تخفيضها. بذلك نكون قد انهينا الدورة واليك الجدول التالي الذي يوضح هذه العملية:

TO من / From الى	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	⊖ 150 (10)	180 +160	⊕ 190	130 (40)	~~50, 10~~, 0
الظهران	⊕ 200 (10)	140	150 (20) ⊖	170	~~30, 10~~, 0
الجبيل	250 (10)	120 (60)	170	220	~~70, 10~~, 0
Demands الطلب	~~30, 20, 10~~, 0	~~60~~, 0	~~20~~, 0	~~40~~, 0	150

صافي التغير في التكلفة (لإدخال الخلية الدمام – جدة): بعد إجراء عملية الدوران السابقة وتحديد الخانات أو الخلايا المراد زيادتها أو تخفيضها فإنه يجب معرفة صافي التغير الذي ستحدثه هذه العملية أو الدورة سواء كان زيادة التكاليف أو خفضها. الجدول التالي يوضح صافي التغير في التكلفة الإجمالية بوضع وحدة واحدة في الخلية الدمام – جدة.

الإجمالي	التغير في التكلفة		التغير في الكمية المنقولة		
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
190+		190+	1	0	الدمام – جدة
150−	150−		9	10	الدمام –مكة
200+		200+	11	10	الظهران – مكة
150−	150−		19	20	الظهران –جدة
90+	300−	390+	80	80	صافي التغير

لذلك فإن صافي التغير هو زيادة في التكلفة الإجمالية بمقدر +90 ريالاً لكل وحدة منقولة باستخدام هذه الخلية. ونستنتج أن نقل أي كمية من الدمام – جدة سيزيد التكاليف.

نضع الرقم +90 " الذي هو صافي التغير في التكلفة الإجمالية نتيجة استخدام هذه الخلية" داخل الخلية أيضا ولكن بدون دائرة ليسهل تمييزه .

من / الى (TO / From)	مكــة	المدينة	جــــدة	الريــاض	العرض Supplies
الدمام	150 (10)	180 +160	190 +90	130 (40)	~~50, 10~~,0
الظهران	200 (10)	140	150 (20)	170	~~30, 10~~ ,0
الجبيل	250 (10)	120 (60)	170	220	~~70, 10~~; 0
Demands الطلب	~~30, 20, 10~~ ,0	~~60~~, 0	~~20~~, 0	~~40~~, 0	150

وبنفس الخطوات السابقة يمكن اختبار جميع الخلايا الفارغة واستخراج صـافي التغـير في التكلفة الإجمالية.

اختبار الخلية (الظهران – المدينة) / صافي التغير في التكلفة الإجمالية

الإجمالي	التغير في التكلفة				التغير في الكمية المنقولة
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
140+		140+	1	0	الظهران – المدينة
200–	200–		9	10	الظهران – مكة
250+		250+	11	10	الجبيل – مكة
120–	120–		59	60	الجبيل المدينة
70+	320–	390+	80	80	صافي التغير

اختبار الخلية الظهران – الرياض / صافي التغير في التكاليف الإجمالية

الإجمالي	التغير في التكلفة		التغير في الكمية المنقولة		
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
170+		170+	1	0	الظهران–الرياض
130–	130–		39	40	الدمام – الرياض
150+		150+	11	10	الدمام – مكة
200–	200–		9	10	الظهران – مكة
10–	330–	320+	60	60	صافي التغير

اختبار الخلية الجبيل – جدة / صافي التغير في التكلفة الإجمالية

الإجمالي	التغير في التكلفة		التغير في الكمية المنقولة		
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
170+		170+	1	0	الجبيل – جدة
150–	150–		19	20	الظهران – جدة
200+		200+	11	10	الظهران – مكة
250–	250–		9	10	الجبيل – مكة
30–	400–	370+	40	40	صافي التغير

اختبار الخلية الجبيل – الرياض / صافي التغير في التكلفة الإجمالية

الإجمالي	التغير في التكلفة		التغير في الكمية المنقولة		
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
220+		220+	1	0	الجبيل –الرياض
130–	130–		39	40	الدمام – الرياض
150+		150+	11	10	الدمام – مكة
250–	250–		9	10	الجبيل –مكة
10–	380–	370+	60	60	صافي التغير

بإدخال صافي التغيرات في التكلفة الكلية نتيجة أشغال الخلايا الفارغة إلى الجدول الابتدائي المحسوب بطريقة أقل تكلفة "The minimum-cost technique" فإن الجدول المحتوى على صافي التغيرات يكون كالتالي:

العرض Supplies	الرياض	جدة	المدينة	مكة	TO من / From الى
~~50, 10~~,0	130 (40)	190 +90	180 +160	150 (10)	الدمام
~~30, 10~~ ,0	170 −10	150 (20)	140 +70	200 (10)	الظهران
~~70, 10~~; 0	220 −10	170 −30	120 (60)	250 (10)	الجبيل
150	~~40~~, 0	~~20~~, 0	~~60~~, 0	~~30, 20, 10~~ ,0	Demands الطلب

من الجدول السابق نلاحظ أن هناك 3 خلايا فيها صافي التغير بالسالب. ومعنى ذلك أن شغل هذه الخلايا بكميات جديدة ستؤدي إلى تخفيض التكاليف الإجمالية.

حيث إن الخلية (الجبيل - جدة) تؤدي إلى أعظم تخفيض لتكلفة الوحدة الواحدة (-30) فإنه سيتم اختيارها لتكون خلية داخلة في الحل. والتخفيض في إجمالي التكاليف سيكون عبارة عن 30 ريالاً لكل ناقلة يتم تحويلها إلى هذا الطريق (الجبيل - جدة)

ملاحظة: هذه الخطوات هي مشابهة تماما لاختبار الصف الأخير في جدول السمبلكس لاختيار المتغير الداخل وهو المقابل لأكبر قيمة سالبة.

كذلك وبما أن الخلية (الجبيل - جدة) سيتم إدخالها الحل، فإنه يجب اختيار خلية أخرى للخروج من الحل الأساسي وذلك حتى يحافظ الحل الأساسي على ما مجموعه 6 خلايا مشغولة ليكون حلا أساسيا مقبولاً.

لتحديد الخلية الخارجة، فإنه يجب ملاحظة النقاط التالية:

1- يجب أن نخصص (نضع) أكبر كمية ممكنة في الخلية الجديدة الداخلة (في مثالنا هذا هي الجبيل- جدة) وذلك لأن ذلك سيؤدي إلى خفض التكاليف الإجمالية.

2- يجب المحافظة على مستوى الكميات المعروضة والمطلوبة الإجمالية.

3- الكميات المخصصة لكل خلية يجب أن تكون موجبة دائماً.

4- يجب أن يرافق كل إضافة للخلية الجديدة (الجبيل-جدة) انخفاض في خلية أخرى (الظهران – جدة، وكذلك الجبيل-مكة).

لذلك فإن الطريقة هي تخصيص وحدات من تلك الخليتين(الظهران- جدة، وكذلك الجبيل -مكة) حتى تقل الكمية الموجودة في أي منهم إلى الصفر. وعند ذلك تنتهي تلك الخلية وتُبعد من الحل الأساسي.

في مثالنا هذا فإن الخليتين المرشحتين للخروج من الحل الأساسي هما (الظهران- جدة، وكذلك الجبيل - مكة) . لاحظ أن إشارة سالب يجب أن توضع على الخليتين المرشحتين للخروج لأن الزيادة في الخلية (الجبيل - جدة) ستؤدي إلى تقليل كلا من الخلية الظهران- جدة، وكذلك الجبيل – مكة.

كذلك لاحظ بما أن الكميات الموجودة في الخلية (الجبيل- مكة) تساوي 10 ناقلات، وهي أقل من الكمية الموجودة في الخلية (الظهران-جدة)،والتي تساوي 20 ناقلة، وهذا يعني أن عملية تخفيض التكلفة هذه ستُنهي الخلية (الجبيل -مكة) أولا. ومنه فإن جميع العشرة ناقلات الموجودة بخلية (الجبيل -مكة) سيتم تحويلها إلى الخلية (الجبيل -جدة)، ويتم تخفيض الخلية (الظهران-جدة) وزيادة الخلية (الظهران - مكة) بهذه الكمية للإبقاء على نفس المستوى من العرض والطلب وعند ذلك يكون صافي التغير في التكلفة الإجمالية الناتج من عملية الدوران هذه هو كما يلي:

الإجمالي	التغير في التكلفة		التغير في الكمية المنقولة		
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
1700+		1700+	10	0	الجبيل -جدة
1500-	1500-		10	20	الظهران-جدة
2000+		2000+	20	10	الظهران - مكة
2500-	2500-		0	10	الجبيل-مكة
300-	4000-	3700+	40	40	صافي التغير

وبذلك يكون جدول الحل الثاني للمشكلة كما يلي:

من / الى (From / TO)	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 (10)	180	190 +90	130 (40)	~~50, 10~~, 0
الظهران	200 (20)	140	150 (10)	170	~~30, 10~~, 0
الجبيل	250	120 (60)	170 (10)	220	~~70, 10~~, 0
Demands الطلب	~~30, 20, 10~~, 0	~~60~~, 0	~~20~~, 0	~~40~~, 0	150

الجدول التالي يوضح أجمالي التكلفة لهذا الحل:

الإجمالي	الدمام – الرياض	الظهران – جدة	الجبيل– جدة	الجبيل – المدينة	الظهران – مكة	الدمام –مكة	
150	40	10	10	60	20	10	الكمية المخصصة
	130	150	170	120	200	150	تكلفة الوحدة الواحدة
21100	5200	1500	1700	7200	4000	1500	

يلاحظ أعلاه أن التكلفة الإجمالية لنقل جميع المنتج انخفضت من 21400 ريالاً في الحل الابتدائي الأول إلى 21100 ريالاً للحل الثاني.

إيجاد الحل الأمثل: لمعرفة ما إذا كان الحل الذي تم التوصل إليه حلاً أمثلاً أم لا، فإنه يجب علينا مرة أخرى اختبار " تقييم" جميع الخلايا الفارغة فيما إذا كان أياً منها سيخفض التكاليف الإجمالية إلى أقل حد ممكن من الحل السابق.

اختبار صافي التغير في شغل هذه الخلايا هو كما يلي:

1- الخلية (الخانة) الدمام – المدينة

الإجمالي	التغير في التكلفة		التغير في الكمية المنقولة		
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
180+		180+	1	0	الدمام – المدينة
120–	120–		59	60	الجبيل – المدينة
170+		170+	11	10	الجبيل – جدة
150–	150–		9	10	الظهران – جدة
200+		200+	21	20	الظهران – مكة
150–	150–		9	10	الدمام – مكة
130+					

2- الدمام – جدة

الإجمالي	التغير في التكلفة				التغير في الكمية المنقولة
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
190+		190+	1	0	الدمام – جدة
150–	150–		19	20	الظهران – جدة
200+		200+	21	20	الظهران – مكة
150–	150–		9	10	الدمام – مكة
90+			50	50	

3- الظهران – المدينة

الإجمالي	التغير في التكلفة				التغير في الكمية المنقولة
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
140+		140+	1	0	الظهران –المدينة
150–	150–		9	10	الظهران – جدة
170+		170+	11	10	الجبيل –جدة
120–	120–		59	60	الجبيل – المدينة
40+	270–	310+	80	80	

4 - الظهران – الرياض

الإجمالي	التغير في التكلفة				التغير في الكمية المنقولة
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
170+		170+	1	0	الظهران – الرياض
130–	130–		39	40	الدمام – الرياض
150+		150+	11	10	الدمام – مكة
200–	200–		19	20	الظهران – مكة
10–	330–	320+	70	70	

5- الجبيل – مكة

الإجمالي	التغير في التكلفة				التغير في الكمية المنقولة
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
250+		250+	1	0	الجبيل – مكة
170–	170–		9	10	الجبيل – جدة
150+		150+	11	10	الظهران – جدة
200–	200–		19	20	الظهران – مكة
30+		400+	40	40	

6- الجبيل – الرياض

الإجمالي	التغير في التكلفة				التغير في الكمية المنقولة
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
220+		220+	1	0	الجبيل – الرياض
130–	130–		39	40	الدمام – الرياض
150+		150+	11	10	الدمام – مكة
200–	200–		19	20	الظهران – مكة
150+		150+	11	10	الظهران – جدة
170–	170–		9	10	الجبيل – جدة
20+	500–	520+			

بعد وضع صافي التغير في التكلفة الإجمالية لكل خلية فارغة فإنه يمكن الآن كتابة جدول تقييم الخلايا الفارغة كالتالي:

TO من / From الى	مكــة	المدينة	جـــدة	الريـاض	العرض Supplies
الدمام	150 (10)	180 +130	190 +90	130 (40)	~~50~~,~~10~~,0
الظهران	200 (20)	140 +40	150 (10)	170 −10	~~30~~, ~~10~~ ,0
الجبيل	250 +30	120 (60)	170 (10)	220 +20	~~70~~, ~~10~~, 0
Demands الطلب	~~30~~, ~~20~~, ~~10~~ ,0	~~60~~, 0	~~20~~, 0	~~40~~, 0	150

يلاحظ أن جميع القيم التي في الخلايا الفارغة موجبة ماعدا الخلية (الظهران-الرياض) فإنها بإمكانها تخفيض التكلفة بنسبة 10 ريالات لكل ناقلة جديدة ستستخدم هذا الطريق. ومع كل وحدة إضافية للخلية (الظهران-الرياض) فإنه يجب خفض كلا من (الدمام - الرياض) والظهران - مكة بوحدة واحدة للحفاظ على مستوى العرض والطلب.

لذلك فإن أحد الخليتين (الدمام - الرياض والظهران - مكة) مرشح للخروج من الحل الأساسي للإبقاء على 6 خلايا مشغولة فقط.

ولكن حيث إن الخلية (الخانة) الدمام - الرياض مخصص لها 40 ناقلة وخانة الظهران - مكة مخصص لها 20 ناقلة فقط فإن الخلية (الظهران - مكة) ستكون الأولى من الخانتين التي ستصل إلى صفر أولا. وستكون الخلية الظهران-مكة هي الخلية الأولى التي تغادر الحل الأساسي.

إذا الخلية الظهران -مكة ستغادر الحل الأساسي والخلية الظهران - الرياض ستدخل الحل وستنقل كامل القيمة الموجودة في الخلية الخارجة إلى الخلية الداخلة.

صافي التغير في التكلفة الإجمالية نتيجة لهذه العملية الدورانية هو الآتي:

الإجمالي	التغير في التكلفة		التغير في الكمية المنقولة		
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
3400+		170×20	20	0	الظهران –الرياض
2600–	130×20		20	40	الدمام – الرياض
3000+		150×20	30	10	الدمام–مكة
4000–	200×20		0	20	الظهران–مكة
200–			70	70	

الحل الثالث

بعد اختبار الحل الثاني والتأكد من وجود إمكانية تخفيض التكاليف الإجمالية وعمل اللازم لتخفيض التكاليف نجد أن جدول الحل الثالث يكون كالتالي:

TO من / From الى	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 (30)	180	190	130 (20)	~~50,10~~,0
الظهران	200	140	150 (10)	170 (20)	~~30, 10~~ ,0
الجبيل	250	120 (60)	170 (10)	220	~~70, 10,~~ 0
Demands الطلب	~~30, 20, 10~~ ,0	~~60~~, 0	~~20~~, 0	~~40~~, 0	150

تقييم الخلايا الفارغة: مرة أخرى يجب أن نقيم جميع الخلايا الفارغة في جدول الحل الثالث والتأكد من وجود أو عدم وجود تخفيض في التكاليف.

1- الدمام – المدينة

صافي التغير في التكاليف الإجمالية:

الإجمالي	التغير في التكلفة				التغير في الكمية المنقولة
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
180+		180+	1	0	الدمام –المدينة
130–	130–		19	20	الدمام –الرياض
170+		170+	21	20	الظهران– الرياض
150–	150–		9	10	الظهران –جدة
170+		170+	11	10	الجبيل –جدة
120–	120–		59	60	الجبيل – المدينة
120+	400–	520+	120	120	

2- الدمام –جدة

صافي التغير في التكاليف الإجمالية

الإجمالي	التغير في التكلفة				التغير في الكمية المنقولة
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
190+		190+	1	0	الدمام –جدة
130–	130–		19	20	الدمام –الرياض
170+		170+	21	20	الظهران–الرياض
150–	150–		9	10	الظهران–جدة
80+	280–	360+	50	50	

3- الظهران-مكة

صافي التغير في التكاليف الإجمالية

الإجمالي	التغير في التكلفة				التغير في الكمية المنقولة
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
200+		200+	1	0	الظهر- مكة
170-	170-		19	20	الظهران- الرياض
130+		130+	21	20	الدمام- الرياض
150-	150-		29	30	الدمام- مكة
10+	320-	330+	80	80	الإجمالي

4- الظهران - المدينة

صافي التغير في التكاليف الإجمالية

الإجمالي	التغير في التكلفة				التغير في الكمية المنقولة
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
140+		140+	1	0	الظهران -المدينة
150-	150-		9	10	الظهران-جدة
170+		170+	11	10	الجبيل-جدة
120-	120-		59	60	الجبيل-المدينة
40+	270-	310+	80	80	الإجمالي

5- الجبيل –مكة

صافي التغير في التكاليف الإجمالية

الإجمالي	التغير في التكلفة				التغير في الكمية المنقولة
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
250+		250+	1	0	الجبيل–مكة
150–	150–		29	30	الدمام–مكة
130+		130+	21	20	الدمام–الرياض
170–	170–		19	20	الظهران–الرياض
150+		150+	11	10	الظهران–جدة
170–	170–		9	10	الجبيل–جدة
40+	490–	550+	80	80	الإجمالي

6- الجبيل –الرياض

صافي التغير في التكاليف الإجمالية

الإجمالي	التغير في التكلفة				التغير في الكمية المنقولة
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
220+		220+	1	0	الجبيل–الرياض
170–	170–		19	20	الظهران–الرياض
150+		150+	11	10	الظهران–جدة
170–	170–		9	10	الجبيل–جدة
30+	340–	370+	40	40	الإجمالي

نتيجة التقييم: يلاحظ من الاختبارات السابقة للخلايا الفارغة بان جميع قيم "صافي التغير في التكاليف الإجمالية" خرجت بالموجب. وهذا دليل على أن الحل هو حل نهائي أمثل . أي هو الحل الوحيد الذي يؤدي إلى تخفيض التكلفة الإجمالية إلى أقل حد ممكن ولا يوجد أي إمكانية لتطوير الحل إلى الأفضل.

جدول إجمالي التكلفة للنقل:

الجدول التالي يبين إجمالي الكميات المخصصة للنقل بأقل تكلفة إجمالية ممكنة.

الإجمالي	الدمام - الرياض	الظهران - جدة	الجبيل- جدة	الجبيل - المدينة	الظهران -الرياض	الدمام -مكة	
150	20	10	10	60	20	30	الكمية المخصصة
	130	150	170	120	170	150	تكلفة الوحدة الواحدة
20900	2600	1500	1700	7200	3400	4500	

ويلاحظ أن التكلفة الإجمالية انخفضت من 21100 في الحل الثاني إلى 20900 في الحل الثالث " وهو الحل الأمثل"، أي بتوفير 200 ريال.

2- طريقة التوزيع المعتدلة MODI لاختبار الخلايا الفارغة

هي طريقة أخرى لتقييم أي خلية فارغة لأي جدول نقل. هذه الطريقة تسمى طريقة التوزيع المعدلة "MODI" Modified Distribution Method وهي قائمة على الخاصية الثنائية لصياغة البرنامج الخطي لمشكلة النقل. وهي تقول بأنه يوجد مجموعة من u_i لكل صف من العرض ومجموعة من v_j لكل عمود من أعمدة الطلب. ولكل خلية من الخلايا المشغولة فإن:

$v_j+u_i = c_{ij}$

ولكل خلية فارغة فإن تقييم الخلية يكون كالتالي:

$d_{ij} = c_{ij}-u_i-v_j$

حيث إن:

C_{ij} : هي تكاليف النقل للخلايا المشغولة.

D_{ij} : صافي التغير في التكاليف أو نتيجة تقييم الخلايا الفارغة.

V_j: قيم التقييم في الأعمدة.

U_i: قيم التقييم في الصفوف.

للبدء بالخطوات افترض أي قيمة عشوائية لقيمة u الأولى وليكن مثلا صفر.

	vj	150	20	100	130	
ui	TO من / From الى	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
0	الدمام	cij 150 (10)	180	190	130 (40)	~~50, 10~~, 0
50	الظهران	200 (10)	140	150 (20)	170	~~30, 10~~, 0
100	الجبيل	250 (10)	120 (60)	170	220	~~70, 10~~, 0
	Demands الطلب	~~30, 20, 10~~, 0	~~60~~, 0	~~20~~, 0	~~40~~, 0	150

وذلك بتطبيق المعادلة الأول حيث:

v1=150-0=150
u2=200-150=50
v3=150-50=100
v4=130-0=130
u3=250-150=100
v2=120-100=20

ولاختيار الخلايا الفارغة فإننا نطبق المعادلة dij=cij-ui-vj وينتج لنا الجدول التالي:

	vj	150	20	100	130	
ui	TO من From الى	مكــة	المدينة	جــــدة	الريـاض	العرض Supplies
0	الدمام	cij 150 (10)	180 +160	190 +90	130 (40)	~~50, 10~~,0
50	الظهران	200 (10)	140 +70	150 (20)	170 -10	~~30, 10~~ ,0
100	الجبيل	250 (10)	120 (60)	170 -30	220 -10	~~70, 10~~, 0
	Demands الطلب	~~30, 20, 10~~ ,0	~~60~~, 0	~~20~~, 0	~~40~~, 0	150

وهي نفس النتيجة التي توصلنا إليها من قبل.

الحلول المتعددة المثلى: قد يحدث ونحن نقيّم الخلايا الفارغـة أن توجـد خليـة أو أكثر يكون صافي التغير في تكاليفها الإجمالية يساوي أصفاراً. هذا يعني أنـه بالإمكـان إدخال هذه الخلية إلى الحل الأساسي بدون أن يؤدي إدخالها الحـل إلى زيـادة أو نقـص التكلفة الإجمالية للنقل. وفي هذه الحالة نقول إنه يوجد حلول متعددة للمـشكلة، وإذا حدث هذا في الحل الأمثل فإنه يمكن القول بأنه يوجد حلول متعددة مثلى للمشكلة.

مثال على الحلول المثلى المتعددة:

افترض أن الحل الأمثل لمشكلة نقل بعض الفواكه هي كما يلي:

TO الى From من	حـائـل	بريـدة	عنيزة	العرض Supplies
الطائف	100 (10)	140	170	10
أبـهـا	170	130 (15)	160 (5)	20
الباحة	120 (15)	110	140 (20)	35
Demands الطلب	25	15	25	65

لو قمنا بتقييم الخلايا الفارغة وكتابتها في الخلايا الخاصة بها فإن جدول التقييم للخلايا الفارغة سيكون كالتالي:

من From \ إلى TO	حائل	بريدة	عنيزة	العرض Supplies
الطائف	100 (10)	140 +50	170 +50	10
أبها	170 +30	130 (15)	160 (5)	20
الباحة	120 (15)	110 0	140 (20)	35
الطلب Demands	25	15	25	65

من جدول التقييم السابق نلاحظ أن صافي التغير في التكلفة الإجمالية بإدخال الخلية "الباحة-بريدة" سيكون صفرا. والذي يعني انه يمكن إدخالها في الحل الأمثل "كحل أمثل آخر" ولكن بدون تغير في التكلفة الإجمالية. وللوصول إلى الحل الأمثل الآخر هذا فإنه بإمكاننا إجراء الدوران السابق والتأكد من عدم التغير في إجمالي التكلفة كما يوضح جدول التغير في إجمالي التكلفة:

التغير في الكمية المنقولة			التغير في التكلفة		الإجمالي
الخلية	من (قبل النقل)	إلى (بعد النقل)	الزيادة في التكاليف	التخفيض في التكاليف	
الباحة -بريدة	0	15	+15 × 110		1650+
الباحة-عنيزة	20	5		-15 × 140	2100−
أبها-عنيزة	5	20	+15 × 160		2400+
أبها-بريدة	15	0		-15 × 130	1950−
الإجمالي	40	40	4050+	4050−	0

وسيكون الحل الأمثل الثاني كما يلي:

من From \ الى TO	حائل	بريدة	عنيزة	العرض Supplies
الطائف	100 (10)	140	170	10
أبـهـا	170	130	160 (20)	20
الباحة	120 (15)	110 (15)	140 (5)	35
الطلب Demands	25	15	25	65

ولو قمنا بتقييم الخلايا الفارغة مرة أخرى فإنها ستكون كما يلي :

من From \ الى TO	حائل	بريدة	عنيزة	العرض Supplies
الطائف	100 (10)	140 +50	170 +50	10
أبـهـا	170 +30	130 0	160 (20)	20
الباحة	120 (15)	110 (15)	140 (5)	35
الطلب Demands	25	15	25	65

عدم تساوي العرض مع الطلب: في الأمثلة السابقة افترضنا أن كمية العرض والطلب دائما متساويتين. ولكن في اغلب الحالات فأنه قد يزيد الطلب على العرض أو العكس. وبما أن الطريقة التي استخدمناها تشترط التساوي فإنه يجب تعديل هذه الطريقة لتتلاءم مع حالة عدم التساوي هذه.

1- العرض أكبر مـن الطلـب: افـترض انـه في مـشكلة شركـة العـاير لنقليـات البترول السابقة والتي تطرقنا لها من قبل كان إنتاج المصانع هو كما يلي:

المصنع	العرض
الدمام	50
الظهران	55
الجبيل	70
الإجمالي	175

بينما الطلب وتكلفة النقل هي كما كانت وللتذكير هي كالتالي:

المستودعات (مراكز التوزيع)	الطلب
مكة	30
المدينة	60
جدة	20
الرياض	40
الإجمالي	150

جدول تكلفة النقل للوحدة الواحدة (ناقلة واحدة)

من / إلى	مكة	المدينة	جدة	الرياض
الدمام	150	180	190	130
الظهران	200	140	150	170
الجبيل	250	120	170	220

المطلوب معرفة توزيع النقل الأمثل لنقل هذه الكميـات المنتجـة في الـشرقية إلى مراكز التوزيع المختلفة بأقل تكلفة ممكنة.

يلاحظ أن العرض يزيد عن الطلب ب "25 ناقلة".

كيف يتم حل هذه المشكلة؟

لحل هذه المشكلة فإنه يجب القيام بإنشاء مركز توزيع (طلب صوري أو وهمـي) (a dummy demand) لاستيعاب العرض الزائد " 25 ناقلة" بحيث تكون طاقتـه العليـا هي الفرق بين العرض والطلب. ولتسهيل العمليـات يجـب أن نجعـل تكلفـة النقـل لمركز الطلب هذا تساوي الصفر.

لـذلك فإنـه عنـدما نريـد حـل المـشكلة الجديـدة باسـتخدام الـركن الـشمالي الغربـــي (The northwest-corner technique) مـثلا فـإن الجـدول الابتـدائي الأول سيكون كالتالي:

TO من / From الى	مكـــة	المدينة	جـــدة	الريـاض	Dummay	العرض Supplies
الدمام	150 (30)	180 (20)	190	130	0	50
الظهران	200	140 (40)	150 (15)	170	0	55
الجبيل	250	120	170 (5)	220 (40)	0 (25)	70
Demands الطلب	30	60	20	40	25	175

في الحل النهائي ستكون هذه الزيادة قد خصصت إلى "مركز الطلب الوهمي" ويمكن تفسير ذلك على أن أحد أو أكثر من مراكز الإنتاج سينقل أقل من الكمية الإجمالية المنتجة.

2- الطلب أكبر من العرض: افترض الآن أن الطلب للمشكلة الأصلية كالتالي:

المستودعات (مراكز التوزيع)	الطلب
مكة	30
المدينة	60
جدة	45
الرياض	40
الإجمالي	175

بينما العرض وتكلفة النقل هي كما كانت كالتالي:

العرض	المصنع
50	الدمام
30	الظهران
70	الجبيل
150	الإجمالي

يلاحظ في هذه الحالة أن الطلب يزيد عن العرض ب 25 ناقلة . لذلك فإنه لإنشاء جدول النقل "Transportation Tableau" الأولي فإننا يجب أن نضع (أو ننشئ) مركز عرض وهمي (a dummy supply point) لملاقاة الطلبات الزائدة عن العرض.

أيضا فإننا نعين تكلفة صفرا لكل كمية تنقل من هذا المركز. الحل الأول باستخدام الركن الشمالي الغربي معطى كما يلي:

TO من / From الى	مكــة	المدينة	جـــدة	الريـاض	العرض Supplies
الدمام	150 (30)	180 (20)	190	130	50
الظهران	200	140 (30)	150	170	30
الجبيل	250	120 (10)	170 (45)	220 (15)	70
Dummy	0	0	0	0 (25)	25
Demands الطلب	30	60	45	40	175

بعـد ذلـك نقـوم بحلها تماما كما قمنا بحلها من قبل. وفي الحل الأمثل نقوم بتخصيص ال 25 ناقلة والموجودة في مركز العرض الوهمي إلى أحد مراكز الطلب. ففي الحل الابتدائي الأول نقول أن مركز التوزيع الذي في الرياض يتطلب 40 وحدة تنقل إليه ولكن 15 فقط وحدة هي التي تصل ويبقى 25 وحدة مطلوبة.

التحلل "Degeneracy": قلنا في الأمثلة السابقة أن طريقة النقل تتطلب أن تكون الخانات أو الخلايا المشغولة يجب أن تساوي عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1 وذلك حتى نستعمل طريقة الحل المعروفة. ولكن قد تحدث أحيانا في الحلول الابتدائية أو حتى في الحلول اللاحقة أن عدد الخلايا المشغولة أقل من المطلوب. فمثلا إذا كان عندنا 3 مراكز إنتاج (عرض) و3 مراكز توزيع (طلب) فإن الحل الأساسي يجب أن يحتوي على 5 خلايا مشغولة على الأقل.

للتوضيح افترض أن عندنا مشكلة النقل "Transportation Problem" الآتية:

إلى To \ من From\	حوطة بني تميم	الخرج	تمير	العرض Supplies
خميس مشيط	150	200	190	50
جيزان	130	210	180	40
نجران	220	160	140	10
الطلب Demands	30	60	10	100

افترض أننا أردنا حلها بطريقة الركن الشمالي الغربي (The northwest-corner technique) لسهولته، الحل الابتدائي سيكون كما يلي:

إلى To \ From\ من	حوطة بني تميم	الخرج	تمير	العرض Supplies
خميس مشيط	150 (30)	200 (20)	190	50
جيزان	130	210 (40)	180	40
نجران	220	160	140 (10)	10
Demands الطلب	30	60	10	100

من الحل السابق نجد أننا قمنا بحلها ولكن بشغل 4 خلايا فقط وليس 5، كما هو مطلوب.

مع أن الحل السابق هذا ممكن إلا أن المشكلة التي يسببها هو كيف نقيّم الخلايا الفارغة؟

مثلا إذا أردنا أن نختبر الخلية (خميس مشيط – تمير) فإننا سنقوم بطريقة الدوران التالية :

الإجمالي	التغير في التكلفة				التغير في الكمية المنقولة
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
+190		+190	1	0	خميس مشيط–تمير
-140	-140		9	10	نجران– تمير
+50	-140	+190	10	10	

ولكن لا نستطيع إكمال طريقة الدوران لأنه يلاحظ أن نجران تنتج 10 وحدات ولا نستطيع أن نضع أي كمية أقل من 10 وحدات في تلك الخلية لأننا لن نستطيع تعويضها، فهي الخلية الوحيدة المشغولة في الصف.

لذلك يقال للحل بأنه " حل متحلل "Degeneracy " " ولا يمكن حلها بطريقة النقل السالفة الذكر إلا بعد إجراء بعض التعديلات على الجدول الابتدائي .

هذه التعديلات تتم عن طريق اعتبار أحد الخلايا الفارغة بأنها خلية مشغولة. افترض أن " s" هي قيمة صغيرة جدا تقترب من الصفر، وضع هذه القيمة في أحد الخلايا الفارغة ليكمل عدد الخلايا المشغولة إلى الحد المطلوب. هذا الرقم صغير لدرجة انه لا يؤثر على العرض أو الطلب أو حتى التكلفة الإجمالية وإذا شغلت خلية فارغة بهذه القيمة في الحل الابتدائي فإن الحل سيكون أساسي وبدون تأثير على الحل.

إذا تكمن المشكلة في معرفة أي خلية ممكن لنا أن نشغلها بهذه القيمة الصغيرة "s".

بالنظر إلى الجدول السابق فإنه بإمكاننا التفريق بين نوعين من الخلايا الفارغة:

1- خلايا ممكن اختبارها: وذلك مثل: الخلية (جيزان – حوطة بني تميم). فلو أردنا أن نقيّم هذه الخلية واستخراج صافي التغير في التكلفة الإجمالية لكان كالتالي:

الإجمالي	التغير في التكلفة				التغير في الكمية المنقولة
	التخفيض في التكاليف	الزيادة في التكاليف	إلى (بعد النقل)	من (قبل النقل)	الخلية
130+		130+	1	0	جيزان-حوطة بني تميم
150-	150-		29	30	خميس مشيط-حوطة بني تميم
200+		200+	21	20	خميس مشيط-الخرج
210-	210-		39	40	جيزان-الخرج
30-	360-	330+	90	90	الإجمالي

2- خلايا لا يمكن اختبارها: وهي الخلايا التالية: خميس مشيط-تمير، جيزان - تمير، نجران - حوطة بني تميم، نجران - الخرج.

لتصحيح أو تعديل الحالة السابقة يمكن وضع القواعد الآتية:

-إذا كان جدول النقل الابتدائي متحل (Degeneracy)، ضع القيمة القليلة "s" في أي خلية لا يمكن اختبارها واختبر جميع الخلايا الفارغة. ولا حظ أن هذه القيمة المتناهية في الصغر يمكن أن تنتقل إلى خلايا أخرى فارغة في كل مرحلة إذا كان تقييم هذه الخلايا الفارغة سيؤدي إلى تخفيض في التكاليف. كرر العملية هذه كلما احتجت لذلك للمحافظة على عدد الخلايا المشغولة في حدود المطلوب.

بتطبيق هذه القاعدة على مشكلة النقل المتحللة فإن ذلك سيولد حل أساسي مقبول وذلك بوضع هذه القيمة القليلة" s" في خلية (نجران - الخرج) وبذلك يمكن اختبار وتقييم جميع الخلايا الفارغة.

الجدول التالي يوضح انه بالإمكان اختبار جميع الخلايا الفارغة إذا وضعنا القيمة القليلة" s" في أي خلية لا يمكن اختبارها، ولتكن مثلا (نجران - الخرج).

إلى To \ From\ من	حوطة بني تميم	الخرج	تمير	العرض Supplies
خميس مشيط	150 (30)	200 (20)	190	50
جيزان	130	210 (40)	180	40
نجران	220	160 (s)	140 (10)	10
الطلب Demands	30	60	10	100

وبتطبيق قواعد الدوران السابقة فـإن الجـدول الخـاص بتقـيّم الخلايـا الفارغـة سيكون كالتالي:

إلى To \ From\ من	حوطة بني تميم	الخرج	تمير	العرض Supplies
خميس مشيط	150 (30)	200 (20)	190 10+	50
جيزان	130 30-	210 (40)	180 10-	40
نجران	220 + 110	160 (s)	140 10	10
Demands الطلب	30	60	10	100

تلخيص خطوات طريقة النقل" Transportation Algorithm "

خطوة (1): بناء جدول النقل موضحا المصادر، مراكز التوزيع أو الغايات، الكميات المعروضة، الكميات المطلوبة، وتكلفة الوحدة الواحدة

خطوة (2): إذا كان العرض أكبر من الطلب، ضع طلباً وهمياً بالكمية الزائدة فقط وضع تكاليف النقل لهذا الطلب تساوي أصفاراً. أما إذا كان الطلب أكبر من العرض، نضع عرضاً وهمياً بالكمية الزائدة فقط وضع تكاليف النقل لهذا العرض تساوي صفراً .

خطوة (3): أوجد الحل الابتدائي الممكن الأول باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي، أو طريقة أقل تكلفة أو طريقة فوجل.

خطوة (4): إذا وجد مشكلة " تحلل"، ضع قيمة صغيرة ولتكن "s" في أحد الخلايا غير الممكن تقييمها.

خطوة (5): قيّم أو اختبر جميع الخلايا الفارغة باستخدام الطريقة العادية أو طريقة MODI.

خطوة (6): إذا كانت نتيجة التقييم غير سالبة لكل الخلايا الفارغة، فإن ذلك الحل هو حل أمثل، أما إذا وجد على الأقل خلية واحدة سالبة فإن الحل الحالي غير أمثل وبالإمكان تطويره وتحسينه بإحلال هذه الخلية السالبة بدلاً من أحد الخلايا المشغولة .

خطوة (7): الخلية الجديدة والداخلة في الحل هي الخلية الفارغة والتي نتيجة تقييمها يعطي أكبر قيمة سالبة.

خطوة (8): انقل أكبر كمية ممكنة للخلية الداخلة الجديدة، وهي كامل الكمية الموجودة في الخلية الخارجة.

خطوة (9): تأكد من نقل كامل الكميات من المصادر إلى مراكز التوزيع وتأكد من أن متطلبات العرض والطلب قد لُبيت بالكامل.

خطوة (10): اذهب إلى الخطوة الرابعة وكرر العمليات حتى الوصول إلى الحل الأمثل.

ثانياً: مشكلة التعين " التخصيص"

Assignment Problem

مشكلة التعيين تشابه مشكلة النقل من كثير من الجهات ولكنها تتميز ببعض الخصائص الأخرى. ففي مشكلة التعيين نجد أن عدد المصادر (العرض) تساوى عدد مراكز التوزيع (الطلب) وكل الكمية المعروضة والمطلوبة دائما تساوي الواحد الصحيح. مع أن هذه المشكلة بالإمكان حلها بطريقة النقل، إلا انه توجد طريقة أفضل في هذا الشأن. وتسمى طريقة التخصيص. من اجل معرفة خطوات الحل بطريقة التخصيص اعتبر هذا المثال:

-أربعة عمال يعملون في مصنع المقص السحري للثياب الجاهزة. ويراد توزيعهم على أربع مكائن بطريقة تؤدي إلى خفض التكلفة. الجدول التالي يوضح تكاليف عمل كل شخص على كل ماكينة.

جدول تخصيص العمال المكائن:

الأعمال Jobs					
إلى \ من		ماكينة القص	ماكينة الخياطة	ماكينة الأزرار	ماكينة التغليف
العمال Men	حمد	20	25	22	28
	محمود	15	18	23	17
	حامد	19	17	21	24
	على	25	23	24	24

المطلوب تخصيص أو تعيين كل عامل من العمال الأربعة لعمل معين بحيث نصل إلى أقل تكلفة.

بالإمكان أن نخصص – مثلاً –

حمد للقص، محمود للخياطة، حامد لعمل الأزرار، على للتغليف.

و إجمالي التكلفة لهذا الحل يكون 20 + 18 + 21+24 = 83 ريالاً.

جدول التعيين (التخصيص) التالي يوضح هذا الحل:

الأعمال Jobs					
إلى \ من		ماكينة القص	ماكينة الخياطة	ماكينة الأزرار	ماكينة التغليف
		20			
العمال Men	حمد	X			
			18		
	محمود		X		
				21	
	حامد			X	
					24
	على				X

ولكن التخصيص السابق قد لا يكون أمثلا. لذلك يجب إجراء بعض الخطوات التي تجعل إيجاد الحل الأمثل سهلاً.

قبل التطرق إلى خطوات الحل بطريقة هانغاريان (Hungarian Method) فإنه يجب معرفة الآتي:

حمد مثلا لو خصص لأي ماكينة فإن تكلفته لن تقل عن 20 ريالاً بأي حال من الأحوال وذلك إذا عين عاملا في قص القماش.

أما إذا عين حمد للخياطة فإن التكلفة من ذلك ستكون 20 + 5 = 25 ريالاً بالمثل لو عين حمد للأزرار فإن التكلفة ستكون 20 +2 =22 ريالاً أو لو عين حمد للتغليف فإن التكلفة ستكون 20 +8=28 ريالاً .

لذلك فإنه يمكن اعتبار أن 20 ريالاً هذه هي عبارة عن تكلفة ثابتة بغض النظر عن أي ماكينة يعمل عليها حمد. هذه القيمة بما أنها مشتركة بين الأعمال المختلفة التي يمكن أن يقوم بها حمد فإنه يمكن حذفها من جميع القيم الخاصة بحمد.

لذلك فإنه يمكن أن يقال بأن أقل تكلفة ممكن أن تتحملها الشركة بتخصيص أو تعيين العامل حمد إلى أي ماكينة سيكون على الأقل 20 ريالاً بالإضافة إلى التكاليف الإضافية الخاصة بكل عمل وهي كالتالي:

التكلفة الثابتة	ماكينة التغليف	ماكينة الأزرار	ماكينة الخياطة	ماكينة القص	إلى \ من
		الأعمال Jobs			
20 ريالاً	8	2	5	0	حمد

كذلك بالنسبة إلى العمال الآخرين فمثلا محمود سيكلف على الأقل 15 ريالاً وحامد 17 ريالاً، وأخيراً علي سيكلف على الأقل 23 ريالاً. لذلك فإننا نجد أن جدول التخصيص السابق سيكون بعد خصم هذه التكاليف الثابتة من كل صف كالتالي:

التكلفة الثابتة	ماكينة التغليف	ماكينة الأزرار	ماكينة الخياطة	ماكينة القص	إلى \ من	
			الأعمال Jobs			
20	8	2	5	0	حمد	العمال Men
15	2	8	3	0	محمود	
17	7	4	0	2	حامد	
23	1	1	0	2	على	
75	الإجمالي					

بالنظر إلى الجدول السابق فإننا نلاحظ أن شخصين من الممكن أن يخصص لهم عملين بدون تكبد خسائر إضافية مثلا حمد يتولى القص وحامد الخياطة أو محمود القص وعلي الخياطة. ولكن إذا أردنا أن نخصص العمال الأربعة للأعمال المختلفة فإنه لابد من تحمل تكاليف أخرى غير الـ 75 ريالاً. لذلك فإن التكاليف الإضافية الأخرى هي عبارة عن التكلفة الخاصة بتخصيص أي عامل لماكينة التغليف أو الأزرار؛ وذلك لأنه يلاحظ أنه لا يوجد أصفار في تلك العمودين. لذلك فإن التكلفة الثابتة الآن ستزيد بمقدار التكاليف الثابتة في كل عمود. أي بإضافة أقل قيمة في كل عمود إلى ال 75 ريالاً السابقة وسيكون الجدول بعد طرح أقل قيمة من كل عمود.

الأعمال Jobs					
إلى \ من	ماكينة القص	ماكينة الخياطة	ماكينة الأزرار	ماكينة التغليف	التكلفة الثابتة
حمد	0	5	1	7	20 ريالاً
محمود	0	3	7	1	15 ريالاً
حامد	2	0	3	6	17 ريالاً
على	2	0	0	0	23 ريالاً
التكلفة الثابتة	0	0	1	1	77 = 2+75

بهذه التكلفة الـ 77 نقول إنه بالإمكان تخصيص حمد أو محمد للقص، حامد للخياطة، على إما للأزرار أو التغليف. ولكن حيث إنه لا يمكن أن يعمل كلا من حمد ومحمود على ماكينة القص في آن واحد فإن على أحدهم أن يذهب إلى ماكينة أخرى وبذهاب أيا منهم إلى الماكينة الأخرى فإنه سيتحمل تكلفة إضافية أخرى غير الـ 77 ريالاً.

الآن وبعد طرح أقل قيمة في كل عمود وكل صف للوصول إلى أصفارا في كل صف وعمود يجب أن نستخدم طريقة أخرى لمعرفة التكلفة الإضافية اللازمة لمشكلة التخصيص هذه. هذه الطريقة تتم برسم خطوط عاموديه وأفقية لتغطية جميع الأصفار. هذه الخطوط يجب أن تكون أقل عدد معين من الخطوط. أي نحاول أن نطمس على أكثر من صفر بخط واحد. وبالنظر إلى الجدول السابق فإنه يلاحظ أن أقل عدد ممكن من الخطوط لطمس جميع الأصفار هو 3 أي انه يساوي عدد التخصيصات الممكنة عملها بدون أي زيادة في التكلفة الإجمالية (77 ريالاً).

يكون الجدول السابق بعد الطمس على جميع الأصفار كالتالي:

الأعمال Jobs					
التكلفة الثابتة	ماكينة التغليف	ماكينة الأزرار	ماكينة الخياطة	ماكينة القص	إلى \ من
20 ريالاً	7	1	5	0	حمد
15 ريالاً	1	7	3	0	محمود
17 ريالاً	6	3	0	2	حامد
23 ريالاً	0	0	0	2	علي

بعد ذلك نختار أقل قيمة من القيم غير المغطاة بخط وهي المربع التالي :

ماكينة التغليف	ماكينة الأزرار	ماكينة الخياطة
7	1	5
1	7	3

هذه القيمة هي الواحد الصحيح " 1" . إذا رمزنا بالرمز"h " لهذه القيمة القليلة فإن التكلفة الإضافية الجديدة تكون كالتالي:

التكلفة الإضافية الجديدة = (أقل قيمة للخلايا غير المغطاة "h ") ×(عدد الخطوط الأفقية – عدد الخطوط العاموديه).

= (1 ريال) (2−1) = 1×1=1 ريال

إذاً أقل تكلفة إجمالية ثابتة لتخصيص جميع العمال لجميع الآلات = 77 + 1 = 78 ريالاً.

لإيجاد جدول التكلفة الجديد بعد رسم الخطوط يجب اتباع الخطوات التالية:

1- اطرح قيمة أقل خلية غير مغطاة "h " من جميع الخلايا غير المغطاة بخط.

2- أضف قيمة أقل خلية غير مغطاة "h " لكل خلية مغطاة بخطين اثنين (أي تقع على التقاطع).

3- الخلايا المغطاة بخط واحد تبقى كما هي.

بتطبيق هذه القاعدة على جدول التكلفة السابق فإن جدول التكلفة الجديد يكون كالتالي:

الأعمال Jobs					
التكلفة الثابتة	**ماكينة التغليف**	**ماكينة الأزرار**	**ماكينة الخياطة**	**ماكينة القص**	**إلى \ من**
20 ريالاً	6	0	4	0	حمد
15 ريالاً	0	6	2	0	محمود
17 ريالاً	6	3	0	3	حامد
23 ريالاً	0	0	0	3	على

وبذلك نكون توصلنا إلى الحل الأمثل بطريقة (Hungarian Method) حيث لا يمكن تغطية الأصفار بأقل من أربعة 4 خطوط. كالتالي:

الأعمال Jobs					
التكلفة الثابتة	ماكينة التغليف	ماكينة الأزرار	ماكينة الخياطة	ماكينة القص	إلى \ من
20 ريالاً	6	0	4	0	حمد
15 ريالاً	0	6	2	0	محمود
17 ريالاً	6	3	0	3	حامد
23 ريالاً	0	0	0	3	على

وبالنظر إلى الجدول السابق فإننا نلاحظ انه يوجد حلين اثنين أمثلين وليس حلا واحدا. يقال أن هذا الحل أمثلا إذا كان الحل يؤدي إلى تخصيص جميع العاملين لجميـع الوظائف بأقل تكلفة.

الحل الأول :

الأعمال Jobs					
ماكينة التغليف	ماكينة الأزرار	ماكينة الخياطة	ماكينة القص	إلى \ من	
28	22	25	20 X	حمد	العمال Men
17 X	23	18	15	محمود	
24	21	17 X	19	حامد	
24	24 X	23	25	على	

التكلفة هي كما قلنا 78 ريالاً والتعيين هو كالتالي:

حمد للقص

محمود للتغليف

حامد للخياطة

على لعمل الأزرار

وللتأكد من إجمالي التكلفة فإننا نقوم بجمع التكاليف الخاصة بكل خلية مشغولة

= 20 + 17+17 + 24 =78 ريال

الحل الثاني :

الأعمال Jobs					
ماكينة التغليف	ماكينة الأزرار	ماكينة الخياطة	ماكينة القص	إلى \ من	
28	22 X	25	20	حمد	العمال Men
17	23	18	15 X	محمود	
24	21	17 X	19	حامد	
24 X	24	23	25	على	

التكلفة 78 ريالاً والتعيين هو كما يلي:

حمد لعمل الأزرار

محمود للقص

حامد للخياطة

علي للتغليف

وللتأكد من إجمالي التكلفة فإننا نقوم بجمع التكاليف الخاصة بكل خلية مشغولة = 22 + 15+17 + 24 = 78 ريال

خطوات حل مشكلة التخصيص بطريقة Hungarian

1- ابدأ بإيجاد أقل العناصر في كل صف من صفوف المصفوفة (m x m) والتي هدفها تخفيض التكلفة. وأوجد المصفوفة الجديدة بعد طرح أقل العناصر في كل صف من الصف التابع له.

2- أوجد أقل العناصر في كل عمود من أعمدة المصفوفة السابقة . وأوجد المصفوفة الجديدة بعد طرح أقل العناصر في كل عمود من العمود التابع له.

3- ارسم أقل خطوط (عمودية أو أفقية) ممكنة لتغطية جميع الأصفار في المصفوفة الناتجة. إذا كان عدد الخطوط الممكنة يساوي m (عدد الوظائف المطلوب تخصيصها)، فإن هناك حل أمثل يتمثل في الخطوط المغطاة وتنتهي الخطوات. وإذا كان عدد الخطوط أقل من m فإن الحل الأمثل لم ينتهي وتابع الخطوات التالية:

4- ابحث عن أقل قيمة غير مغطاة بخط. اطرح هذه القيمة من جميع القيم غير المغطاة، وأضفها إلى القيم التي غطيت بخطين، والقيم الأخرى والمغطاة بخط واحد فقط تظل على ما هي عليه. اذهب إلى الخطوة 3 .

ملاحظات:

1- إذا كان هدف مصفوفة التخصيص هو تعظيم (Maximization) فيمكن ضرب جميع القيم في 1− وتكملة الحل كمشكلة تخفيض (Minimization).

2- إذا كانت الصفوف والأعمدة غير متساوية فإنه يقال للمشكلة إنها غير متوازنة(unbalanced) لذلك فإنه من الممكن إضافة النقاط الوهمية (Dummy points).

من الممكن أيضا صياغة مشكلة التخصيص بطريقة البرمجة الخطية كالتالي:

نرمز بالرمز xij لتخصيص العامل i على الماكينة j

min 20 x11 + 25 x12 + 22 x13 + 28 x14+ 15x21 + 18 x22 + 23 x23 + 17x24...........
subject to:
Workers constraints
x11+ x12+ x13+x14 =1
.....
machines contraints
x11 + x21+ x31+x41=1
....
xij = (0, 1)

مسائل على مشكلة النقل والتخصيص

1- (إدارة موارد بشرية) ثلاثة عمال يعملون في مصنع الهدايا الجميلة. ويراد توزيعهم على ثلاث مكائن بطريقة تؤدي إلى خفض التكلفة. الجدول التالي يوضح تكاليف عمل كل شخص على كل ماكينة. المطلوب استخدام طريقة Hungarian Method لتخصيص كل موظف لوظيفة معينة وحساب أقل التكاليف:

التغليف	تعبئة الطلبات	التوريد	الوظيفة\ الموظف
26	37	30	إبراهيم
24	40	37	عبد العزيز
27	39	33	محمد

2- (إدارة موارد بشرية)أربعة عمال يعملون في مصنع المقص السحري للثياب الجاهزة. ويراد توزيعهم على أربع مكائن بطريقة تؤدي إلى خفض التكلفة. الجدول التالي يوضح تكاليف عمل كل شخص على كل ماكينة.

جدول تخصيص العمال على المكائن :

الأعمال Jobs					
ماكينة التغليف	ماكينة الأزرار	ماكينة الخياطة	ماكينة القص	إلى \ من	
28	22	25	20	حمد	العمال Men
17	23	18	15	محمود	
24	21	17	19	حامد	
24	24	23	25	علي	

المطلوب هو صياغة المشكلة لتخصيص أو تعيين كل عامل من العمال الأربعة لعمل معين بحيث نصل إلى أقل تكلفة.

3- شركة المملكة للمياه المحلاة تقوم يوميا بنقل مياه الشرب والمصنوعة في بعض الأحياء في الرياض إلى الأحياء الأخرى المحتاجة. إذا كانت الكميات المنتجة في هذه الأحياء والمستهلكة وتكاليف النقل هي كالتالي:

اسم الحي	الإنتاج
الملز	250
العليا	50
ام الحمام	140
السليمانية	160
الإجمالي	600

اسم الحي	الاستهلاك
النسيم	100
العريجاء	200
السويدي	130
الإجمالي	430

التكلفة بالريال	السويدي	العريجاء	النسيم
الملز	27	34	25
العليا	28	32	30
أم الحمام	27	26	33
السليمانية	30	25	27

والمطلوب هو تكوين جدول الحل الأساسي الابتدائي بطريقة فوجل واختبر أمثليته وحدد الخلية الداخلة والخارجة.

4- المطلوب تقييم الخلايا الفارغة بطريقة المسار المتعرج:

	Dummy	**السويدي**	**العريجاء**	**النسيم**	
250	0 170	27	34	25 80	
50	0	28 30	32	30 20	العليا
140	0	27 100	26 40	33	أم الحمام
160	0	30	25 160	27	السليمانية
			130 170	100 200	الطلب

5- إذا كان جدول النقل والتكلفة بين مصادر الإنتاج والتوزيع كالتالي:

المطلوب: تقييم الخلايا الفارغة حسب طريقة التوزيع المعدلـة (مـودي) MODI في جدول النقل التالي:

العرض	**منفوحة** **V4=**	**العقيق** **v3=**	**الملز** **v2=**	**العليا** **v1=**	**إلى \ من**
50	9 40	16 10	16	17	السويدي U1=
55	12	17 35	20	8 20	أم الحمام U2=
45	25 10	20	10 35	15	النسيم U3=
150	40	55	35	20	الطلب

استخدام الحاسب في حل مسائل النقل والتخصيص

لتوضيح ذلك دعنا نكتب معطيات مثال شركة العاير للنقل والتي تقوم بتكرير البترول ونقله من المنطقة الشرقية إلى مراكز التوزيع في كلا من المنطقة الوسطى والغربية. ويوجد عند الشركة 3 مناطق إنتاجية و4 مناطق لاستهلاكه وتوزيعه.

جدول الإنتاج والطلب والتكلفة معطاة في الجدول التالي:

موقع المصنع	الإنتاج (العرض)
الدمام	50
الظهران	30
الجبيل	70
الإجمالي	150

المستودعات (مراكز التوزيع)	الطلب
مكة	30
المدينة	60
جدة	20
الرياض	40
الإجمالي	150

جدول تكلفة النقل للوحدة الواحدة (ناقلة واحدة)

من / إلى	مكة	المدينة	جدة	الرياض
الدمام	150	180	190	130
الظهران	200	140	150	170
الجبيل	250	120	170	220

المطلوب معرفة التوزيع الأمثل لنقل هذه الكميات المنتجة في الشرقية إلى مراكز التوزيع المختلفة بأقل تكلفة ممكنة.

وكان الحل النهائي هو :

الجدول التالي يبين إجمالي الكميات المخصصة للنقل بأقل تكلفة إجمالية ممكنة.

الإجمالي	الدمام - الرياض	الظهران - جدة	الجبيل- جدة	الجبيل - المدينة	الظهران -الرياض	الدمام -مكة	
150	20	10	10	60	20	30	الكمية المخصصة
	130	150	170	120	170	150	تكلفة الوحدة الواحدة
20900	2600	1500	1700	7200	3400	4500	

ويلاحظ أن التكلفة الإجمالية بلغت 20900 ريالاً.

أولا: نقوم بتحديد رقم لكل من مراكز التوزيع ومراكز الطلب حتى نستطيع تحديد تكاليف وكميات كل خلية على حدة كما في الجدول التالي:

من / إلى	مكة(1)	المدينة(2)	جدة(3)	الرياض(4)
الدمام (1)	X11	X21	X31	X41
الظهران(2)	X12	X22	X32	X42
الجبيل(3)	X13	X23	X33	X43

حل مشاكل النقل والتخصيص باستخدام برنامج إكسل Excel

في هذا الجزء سنتعلم كيفية حل مشاكل النقل وكذلك التخصيص باستخدام برنامج إكسل (Excel) لانتشاره وتوفره عند اغلب المستخدمين.

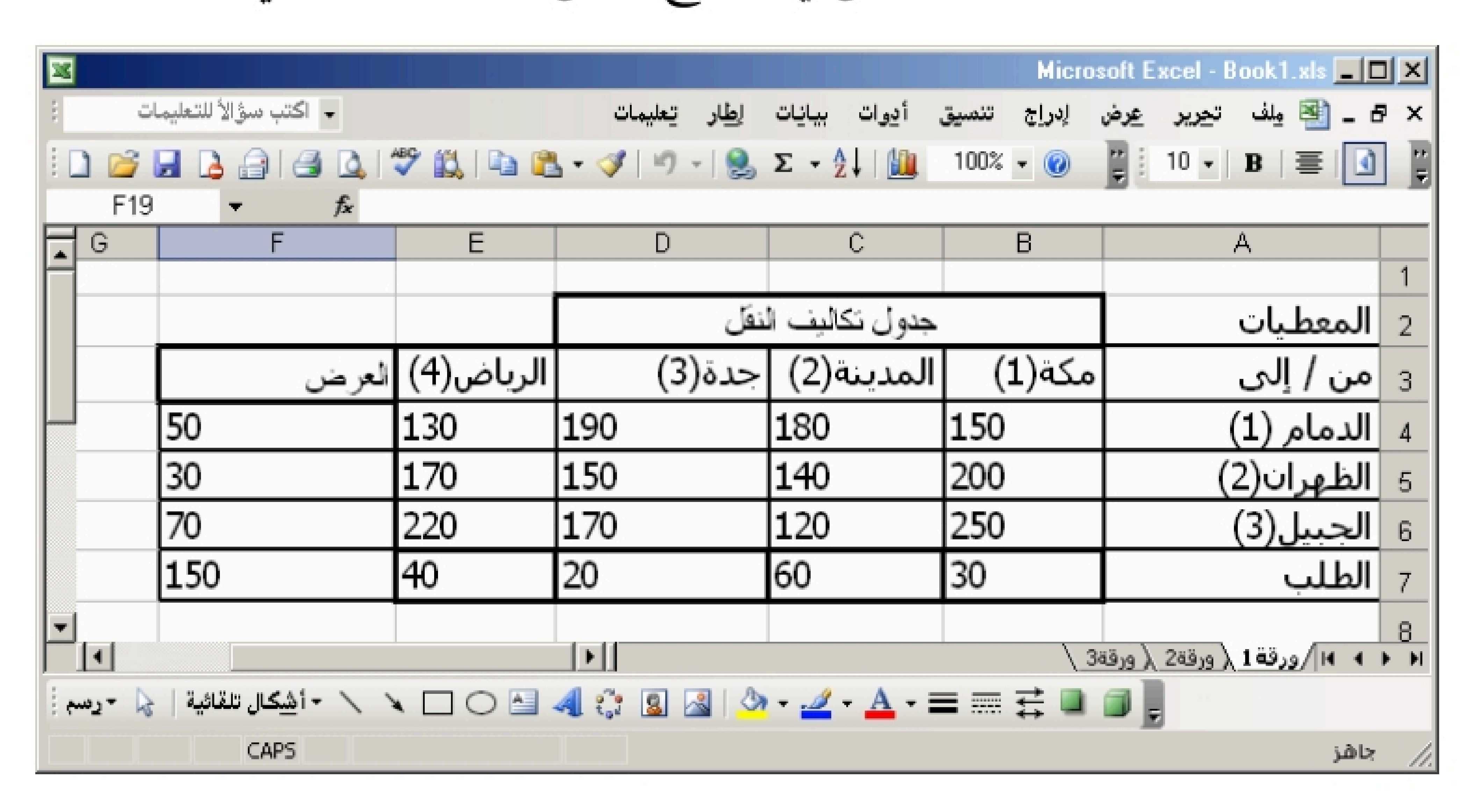
إدخال البيانات كالتالي:

تكاليف النقل في الخلايا: B4:E6

الطاقة الإنتاجية لمراكز الإنتاج (العرض) : F4:F6

الطاقة الاستيعابية لمراكز التوزيع (الطلب): B7:E7

فيكون جدول معطيات مشكلة النقل في برنامج إكسل (EXCEL) كالآتي:



المعطيات	جدول تكاليف النقل				
من / إلى	مكة(1)	المدينة(2)	جدة(3)	الرياض(4)	العرض
الدمام (1)	150	180	190	130	50
الظهران(2)	200	140	150	170	30
الجبيل(3)	250	120	170	220	70
الطلب	30	60	20	40	150

بعد ذلك الخلايا التي يتم فيها وضع النتائج افترض أننا وضعنا النتائج في الخلايا التالية:

عدد الوحدات المنقولة من مركز العرض i إلى مركز الطلب j: B12:E14

إجمالي عدد الوحدات المنقولة من مراكز العرض: F12:F14

إجمالي عدد الوحدات المنقولة إلى مراكز الطلب: B15:E15

كما في الشكل التالي:



	A	B	C	D	E	F
10			جدول الحل			
11	من / إلى	مكة(1)	المدينة(2)	جدة(3)	الرياض(4)	الوحدات المنقولة
12	الدمام (1)					
13	الظهران(2)					
14	الجبيل(3)					
15	الوحدات المنقولة					
16						
17	اجمالي التكاليف					

و لحل المشكلة الآن يتعين علينا وضع معادلة أو دالة الحل باستخدام سولفر (SOLVER) والموجود في قائمة أدوات (TOOLS) في برنامج إكسل (EXCEL). حيث يتعين علينا كتابة المعادلات التي توضح كيفية استخدام المعطيات الموجودة في جدول المعطيات واستخراج الحلول وكتابتها في جدول الحلول. فمثلا، إجمالي التكاليف في الخلية B17 هو عبارة عن مجموع ناتج ضرب جميع الوحدات المنقولة مضروبا في تكاليف هذه الوحدات.

ولذلك فان إجمالي التكاليف (B17) هو عبارة عن ضرب الخلايا (B4:E6) مع الخلايا المقابلة في (B12:E14).

و باستخدام الدالة (SUMPRODUCT) فإننا نضع المعادلة التالية في الخلية (B17). كما في الشكل التالي:

وسائط الدالة

SUMPRODUCT

Array1 B4:E6 = {150,180,190,130;2

Array2 B12:E14 = {0,0,0,0;0,0,0,0;0,0

Array3 = صفيف

= 0

إرجاع مجموع المنتجات الخاص بالنطاقات أو الصفائف المتطابقة.

Array2: ...,array1,array2 من 2 إلى 30 صفيفاً تريد ضرب وجمع مكونات لها. يجب أن يكون لكافة الصفائف الأبعاد نفسها.

ناتج الصيغة = 0

تعليمات حول هذه الدالة موافق إلغاء الأمر

طبعا بما أن عدد الوحدات المنقولة في هذه المرحلة لم يتم استخراجه بعد فإن ناتج التكلفة الإجمالية في الخلية (B17) يساوي الصفر.

بعد ذلك دعنا نحسب إجمالي الكميات المنقولة من كل مركز عرض وإلى كل مركز طلب. أي أن إجمالي الوحدات المنقولة إلى مكة هي إجمالي قيمة الخلايا (B12:B14) وبالنسبة للمدينة (C12:C14) وجدة (D12:D14) والرياض (E12:B14).

وتكون إجمالي الوحدات المنقولة إلى هذه المراكز هي بالترتيب كالتالي:

قيمة الخلية (B15) لمكة هي: =SUM(B12:B14)

قيمة الخلية (C15) للمدينة هي: =SUM(C12:C14)

قيمة الخلية (D15) لجدة هي: =SUM(D12:D14)

قيمة الخلية (E15) للرياض هي: =SUM(E12:E14)

وبالمثل بالنسبة لمراكز العرض فإجمالي الوحدات المنقولة منها هي كالتالي بالترتيب:

قيمة الخلية (F12) للدمام هي : =SUM(B12:E12)

قيمة الخلية (F13) للظهران هي : =SUM(B13:E13)

قيمة الخلية (F14) للجبيل هي : =SUM(B14:E14)

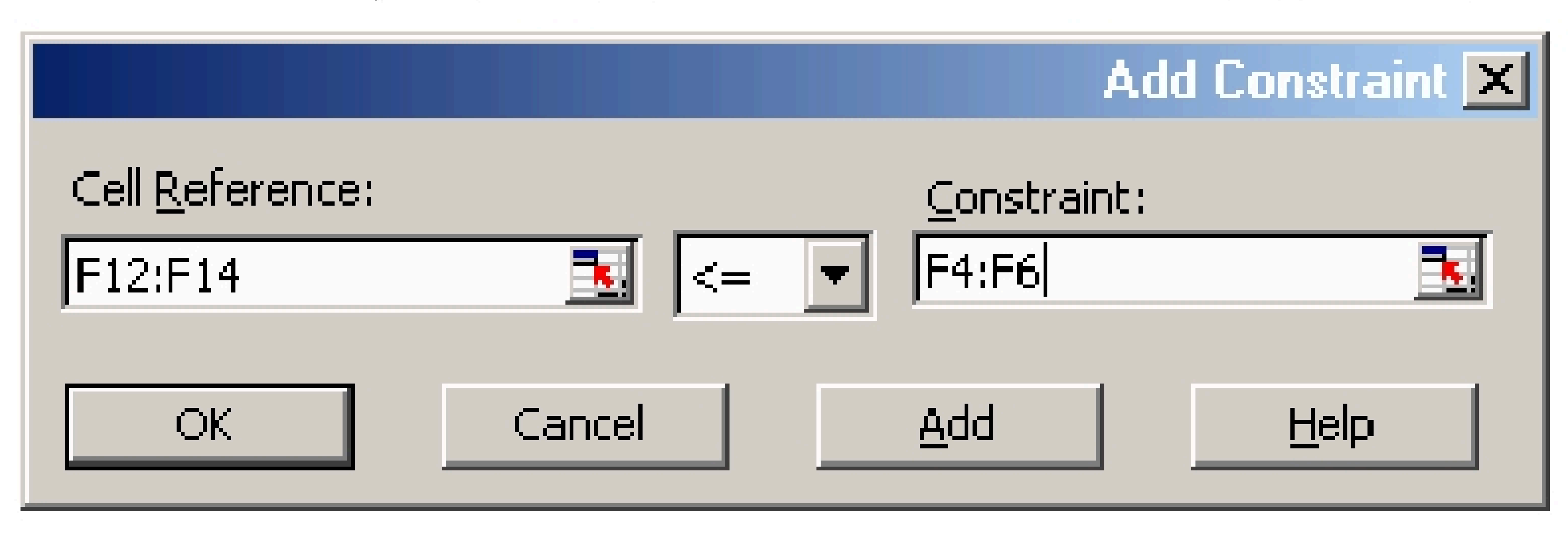
فيصبح جدول النتائج كما يلي:

	A	B	C	D	E	F
10		جدول الحل				
11	من / إلى	مكة(1)	المدينة(2)	جدة(3)	الرياض(4)	الوحدات المنقولة
12	الدمام (1)					0
13	الظهران(2)					0
14	الجبيل(3)					0
15	الوحدات المنقولة	0	0	0	0	0
16						
17	اجمالي التكاليف	0				

الآن جدول النتائج جاهز لاستخدام سولفر (SOLVER) من قائمة أدوات (TOOLS) لتحديد الكميات المنقولة من كل مركز عرض إلى كل مركز طلب ويتم ذلك باتباع الخطوات التالية:

- من قائمة أدوات (TOOLS) نختار سولفر (SOLVER) وعند ظهور النافذة ندخل B17 وهي الخلية الخاصة بإجمالي التكاليف أمام خيار تحديد الخلية الهدف (SET TARGET CELL).
- نختار تخفيض (MIN) أمام خيار (EQUAL TO).
- نكتب B12:E14 أمام خيار (BY CHANGING CELLS).

• نضغط على الزر إضافة (ADD) لإضافة قيد ثم تخرج نافذة إضافة قيد (ADD CONSTRAINT) نكتب F12:F14 في النافذة مرجع الخلية (CELL REFRENCE) ونختار العلاقة أقل من أو يساوي (<=) ونكتب F4:F6 كقيد يجب أن لا تتعداه الكميات المنقولة في خانة (CONSTRANINT). كما في الشكل التالي:



• ثم نضغط على الزر إضافة (ADD) لإدراج قيد آخر على إجمالي الكميات المنقولة إلى مراكز التوزيع وهي الصف B15:E15 ويكون كتابتها كالتالي:

ونكتب التالي:

B15:E15 في النافذة (CELL REFRENCE)

نختار يساوي = حتى يتم تعبئة احتياجات المراكز

وفي خانة القيد (CONSTRAINT) نضع B7:E7 وهي إجمالي الكميات المطلوبة.

• القيد الأخير وهو الخاص بالكميات المنقولة حيث يجب أن لا تقل عن الصفر وخاصة أننا نحاول تخفيض التكاليف فيكون هذا القيد بالنقر على زر إضافة (ADD) ثم نضع الآتي في نافذة القيد:

نكتب B12:B14 في النافذة مرجع الخلية (ADD REFRENCE)

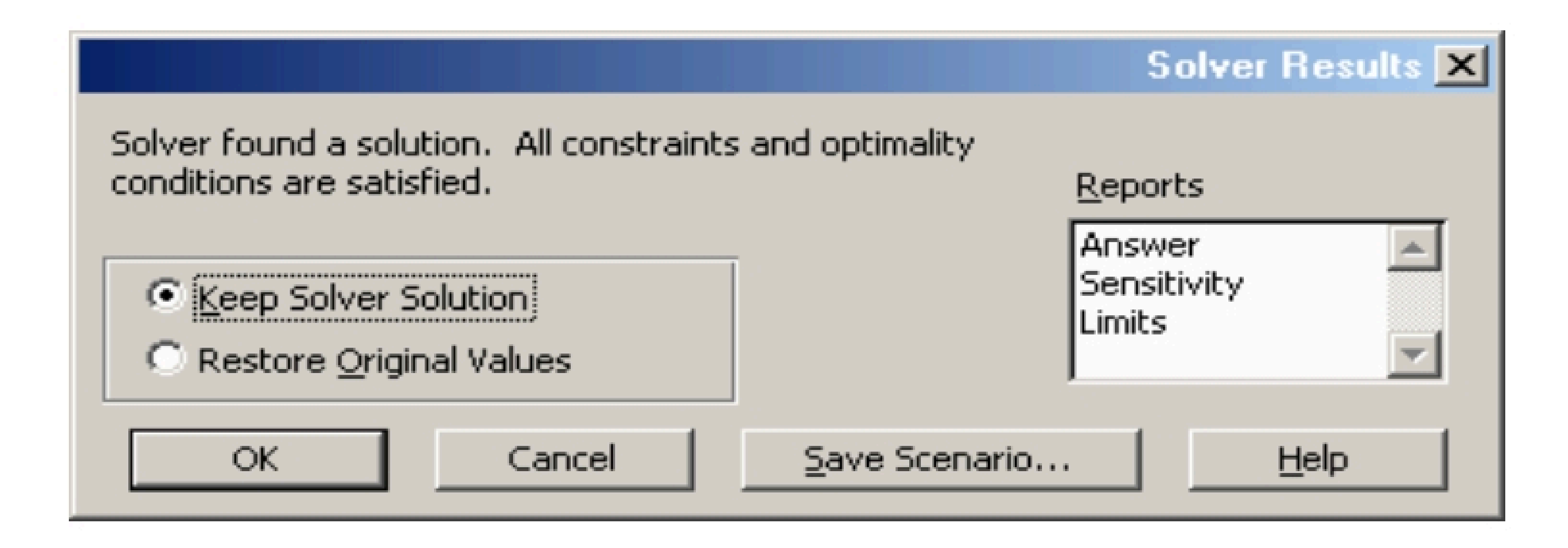
ونختار أكبر من أو يساوي (>=) ثم ندخل الصفر (0) في القيد (CONSTRAINT).

ثم موافق (OK) ويكون شكل نافذة (SOLVER) كالآتي:

بعد ذلك يتعين النقر على خيارات (OPTIONS) ونفترض الآتي:

ASSUME LINEAR Model ثم موافق كما في الشكل التالي:

ثم نختار موافق للرجوع إلى النافذة الخاصة بسولفر ومنها نقوم بالنقر على حل (solve) واختيار الخيار (keep solver solution) كما في الشكل التالي:



وبعد النقر على موافق نجد الحل أصبح أمامنا كما في الشكل التالي:

	جدول الحل				
من / إلى	مكة(1)	المدينة(2)	جدة(3)	الرياض(4)	الوحدات المنقولة
الدمام (1)	30	0	0	20	50
الظهران(2)	0	0	10	20	30
الجبيل(3)	0	60	10	0	70
الوحدات المنقولة	30	60	20	40	150
اجمالي التكاليف	20900				

ونلاحظ أن هذا الحل هو نفسه الذي تم الحصول عليه بالطريقة السابقة باستخدام طريقة الجداول اليدوية.

كذلك يمكن حل مشاكل التخصيص بنفس الطريقة تماما وخاصة أنها حالة خاصة من مشكلة النقل ماعدا أن مجموع الكميات المنقولة في مشكلة التخصيص تكون كل واحدة منها تساوي الواحد.

وكذلك فإن عدد الكميات المنقولة في كل خلية تكون في مشكلة التخصيص أما واحد أو صفر فقط (0.1). ولذلك فلحل مشكلة التخصيص يتعين علينا استبدال تكاليف النقل بتكاليف التخصيص واستبدال مجاميع الطلب والعرض بواحد.

حل مشاكل النقل والتخصيص باستخدام برنامج ليندو Lindo

لحل مشاكل النقل والتخصيص باستخدام برنامج ليندو (Lindo) يتعين علينا أولاً تحويل جدول النقل وصياغته إلى شكل البرمجة الخطية.

فمثلا لحل مشكلة شركة العاير للنقليات السابق والمحلول باستخدام جداول النقل يتعين علينا اتباع الخطوات التالية:

أولاً: معرفة مراكز التوزيع وكذلك الإنتاج والطاقة الاستيعابية لكل مركز وكذلك التكاليف المصاحبة لنقل الوحدة الواحدة من مركز الإنتاج إلى مركز التوزيع. وهي حسب جدول النقل كانت كالآتي:

إلى To \ From\ من	مكة		المدينة		جدة		الرياض		العرض Supplies
		150		180		190		130	
الدمام									50
		200		140		150		170	
الظهران									30
		250		120		170		220	
الجبيل									70
Demands الطلب	30		60		20		40		150

ثانياً: افتراض أن الكميات المنقولة من كل مركز إنتاج إلى كل مركز طلب هي (xij) حيث i ترمز لمركز الإنتاج وj ترمز لمركز الطلب كالآتي:

إلى To \ From\ من	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 X11	180 X12	190 X13	130 X14	50
الظهران	200 X21	140 X22	150 X23	170 X24	30
الجبيل	250 X31	120 X32	170 X33	220 X34	70
Demands الطلب	30	60	20	40	150

ثالثاً: تحويل شكل المشكلة من جدول النقل إلى البرمجة الرياضية. وحيث إن مشكلة النقل هي تخفيض التكاليف فإن دالة الهدف هي تخفيض (Minimization) والقيود هي الكميات الإجمالية المنتجة والموزعة لكل مركز وتكون الصياغة كالتالي:

دالة الهدف:

Min 150x11+180x12+190x13+130x14
+200x21+140x22+150x23+170x24
+250x31+120x32+170x33+220x34

Subject to

قيد مراكز التوزيع:

X11+x12+x13+x14 =50
X21+x22+x23+x24=30
X31+x32+x33+x34=70

قيد مراكز الطلب:

X11+x21+x31=30
X12+x22+x32=60

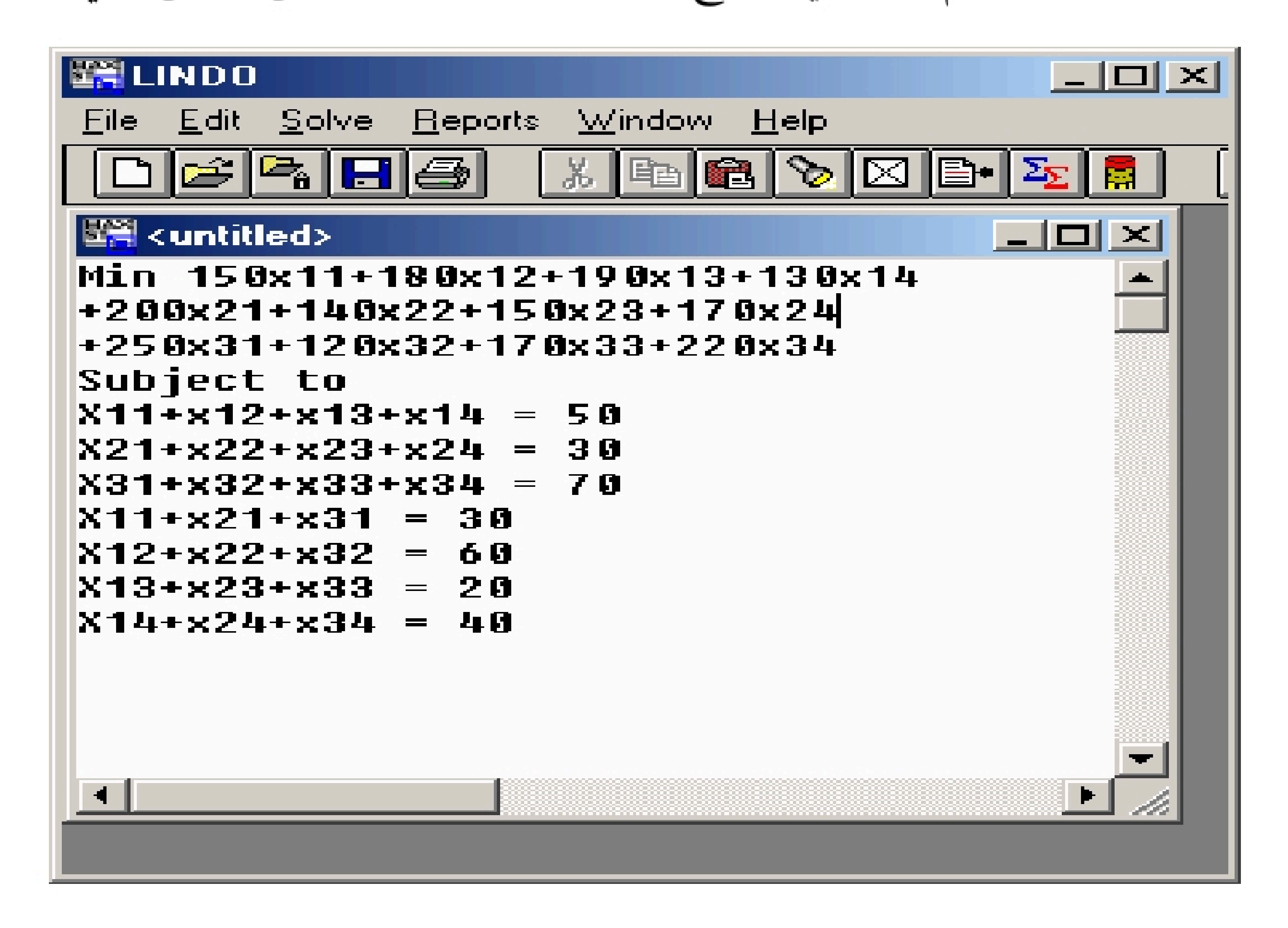
X13+x23+x33=20
X14+x24+x34=40

قيد عدم السالبية:

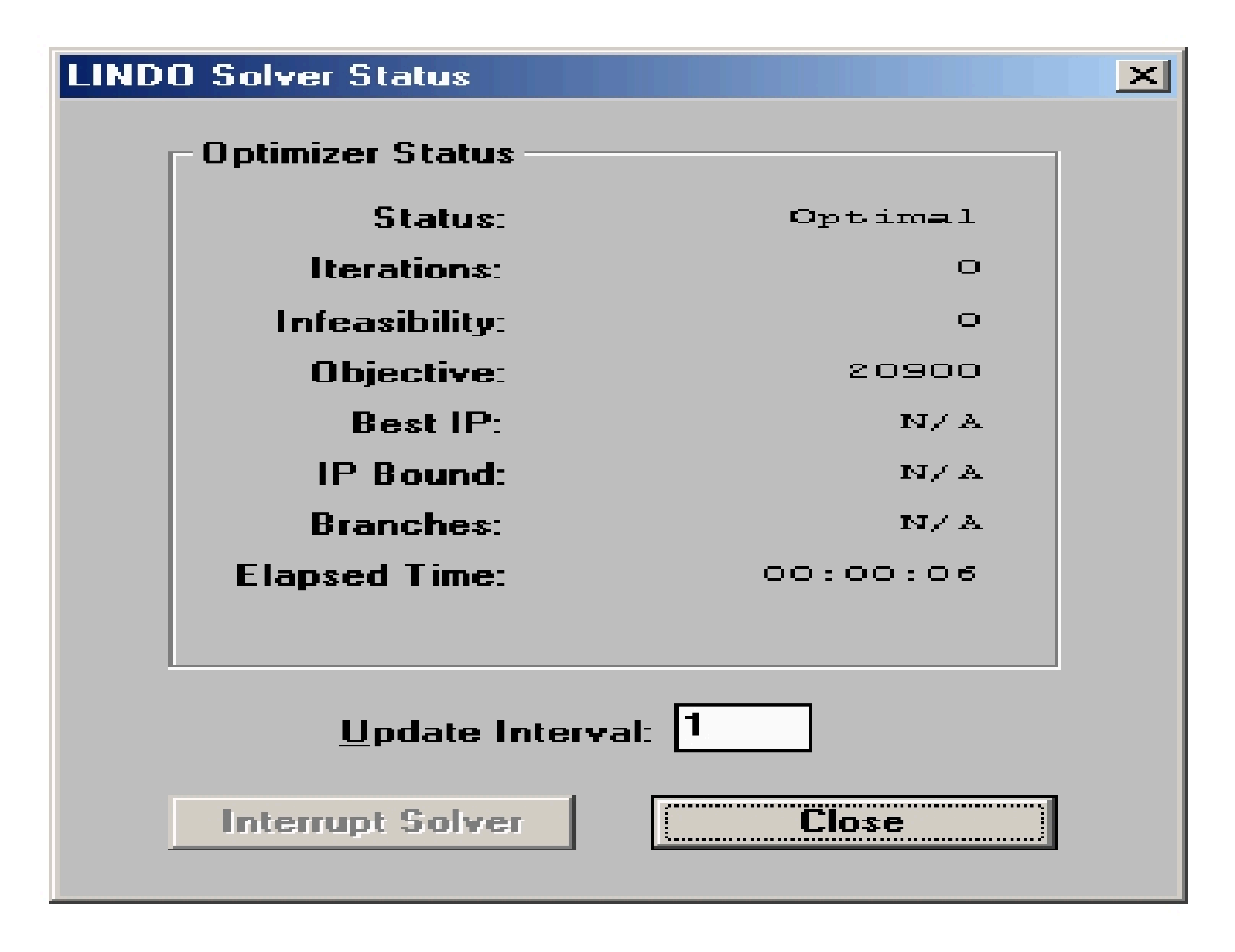
Xij >=0

رابعاً: نسخها ولصقها في برنامج ليندو (Lindo) :

لاحظ أن أي أخطاء أو فراغات قد تسبب في خروج رسائل أخطاء وعند الانتهاء من نسخها ثم لصقها في برنامج ليندو (Lindo) فإنها تبدو مثل الشكل التالي:



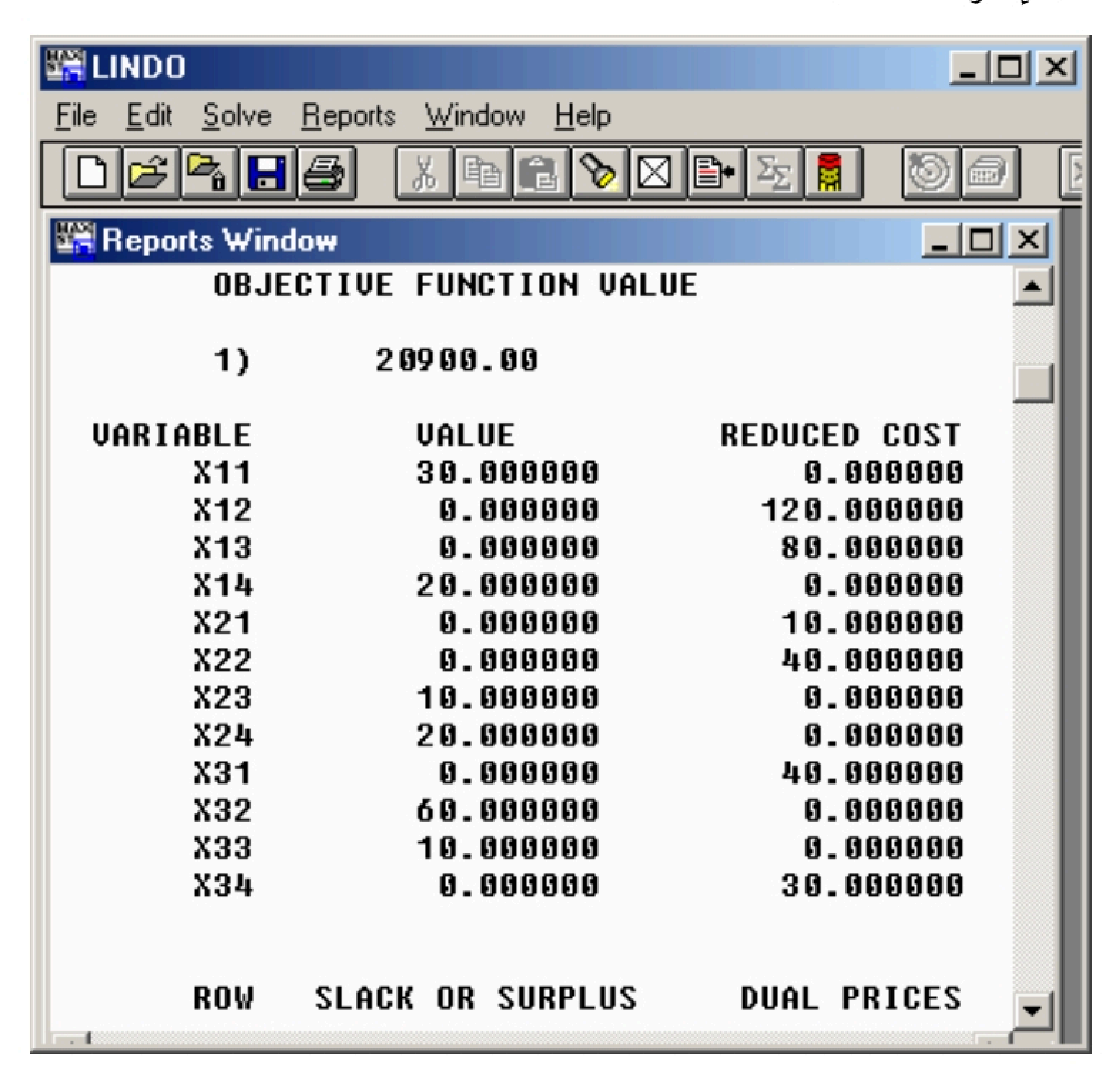
وعند التأكد من كتابة الصياغة بشكل صحيح نأتي إلى حلها بالذهاب إلى قائمة حل (solve) ثم اختيار أمر حل (Solve). وعند حلها تخرج نافذة تؤكد وجود حل أمثل (Optimal) للمشكلة من أول تشغيل وبسرعة جدا وبجزء من الثانية (Elapsed time). ونجد أن الحل الأمثل مطابق لنفس الحل الذي سبق وأن قمنا به باستخدام جداول النقل وهو (20900) ريال هي أقل تكلفة ممكنة:



ويرافق نافذة وجود الحل السابقة نافذة أخرى من يرغب أن يعمل تحليل الحساسية لهذه المشكلة يمكن للمستخدم التأشير عليها بالإيجاب أو النفي حسب رغبة المستخدم كما في التالي:



خامساً: تفسير الحل وهو كما يظهر من نافذة تقارير الحل (Reports window) من قائمة إطار (windows)


LINDO
File Edit Solve Reports Window Help
Reports Window

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 20900.00

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X11	30.000000	0.000000
X12	0.000000	120.000000
X13	0.000000	80.000000
X14	20.000000	0.000000
X21	0.000000	10.000000
X22	0.000000	40.000000
X23	10.000000	0.000000
X24	20.000000	0.000000
X31	0.000000	40.000000
X32	60.000000	0.000000
X33	10.000000	0.000000
X34	0.000000	30.000000

ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES

سادساً: معرفة عدد الوحدات المنقولة من كل مركز إنتاج إلى كـل مركـز توزيـع ومن الشكل السابق نجد أن عدد الوحدات المنقولة هي كما يلي:

X11=30
X14=20
X23=10
X24=20
X32=60
X33=10

وبوضعها في الجدول الخاص بالنقل تكون كما يلي:

إلى To \ From\ من	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 30	180	190	130 20	50
الظهران	200	140	150 10	170 20	30
الجبيل	250	120 60	170 10	220	70
Demands الطلب	30	60	20	40	150

وهذا هو نفس الحل الذي تم التوصل إليه بطريقة جداول النقل.

حل مسائل النقل والتخصيص

1- الحل بالتفصيل:

أ) نبحث عن أقل التكاليف في كل صف

	التغليف	تعبئة الطلبات	التوريد	الوظيفة\ الموظف
26	0	11	4	إبراهيم
24	0	16	13	عبد العزيز
27	0	12	6	محمد

ب) نبحث عن أقل التكاليف في كل عمود

	التغليف	تعبئة الطلبات	التوريد	الوظيفة\ الموظف
26	0	0	0	إبراهيم
24	0	5	9	عبد العزيز
27	0	1	2	محمد
92		11	4	

ج) نقوم بتغطية جميع الأصفار بأقل الخطوط:

	التغليف	تعبئة الطلبات	التوريد	الوظيفة\ الموظف
26	0	0	0	إبراهيم
24	0	5	9	عبد العزيز
27	0	1	2	محمد
92		11	4	

د): بما أن عدد الخطوط (2) أقل من عدد الوظائف (3) نقوم بالبحث عن أقل قيمة غير مغطاة بخط . نطرح هذه القيمة من جميع القيم غير المغطاة، ونضيفها إلى القيم التي غطيت بخطين، والقيم المغطاة بخط واحد فقط تظل على ما هي عليه:

الوظيفة\ الموظف	التوريد	تعبئة الطلبات	التغليف	
إبراهيم	0	0	1	26
عبد العزيز	8	4	0	24
محمد	1	0	0	27
				93

هـ) بما أن عدد الخطوط = عدد الوظائف إذا وصلنا إلى الحل الأمثل وهو كما يلي:

الوظيفة\ الموظف	التوريد	تعبئة الطلبات	التغليف	
إبراهيم	X	0	1	
عبد العزيز	8	4	X	
محمد	1	X	0	
				93

أقل تكلفة ممكنه، إبراهيم للتوريد، عبدالعزيز للتغليف، محمد لتعبئة الطلبات

2- الحل:

نرمز بالرمز xij لتخصيص العامل i على الماكينة j

min 20 x11 + 25 x12 + 22 x13 + 28 x14+ 15x21 + 18 x22 + 23 x23 + 17x24...........
subject to:
x11+ x12+ x13+x14 =1
x21+ x22+ x23+x24 =1
x31+ x32+ x33+x34 =1
x41+ x42+ x43+x44 =1
x11 + x21+ x31+x41=1
x12 + x22+ x32+x42=1
x13 + x23+ x33+x43=1
x14 + x24+ x34+x44=1
xij = (0, 1)

3- الحل:

	النسيم	العريجاء	السويدي	**Dummy**	
الملز	25 100	34 20	27 130	0 -8	250
العليا	30 +13	32 +6	28 +9	0 50	50
ام الحمام	33 +16	26 20	27 +8	0 120	140
السليمانية	27 +11	25 160	30 +6	0 +1	160
الطلب	100	200	130	170	

الحل غير أمثل لوجود قيم سالبة في الخلايا الفارغة.

الخلية الداخلة: هي الخلية الملز – dummy.

الخلية الخارجة : هي الملز – العريجا.

وللوصول إلى الحل الأمثل علينا الانتقال إلى جدول جديد ثم الاستمرار في تقييم الخلايا حتى تكون جميع نتائج التقييم موجبة.

4- الحل:

	النسيم		**العريجاء**		**السويدي**		**Dummy**		
		25		34		27		0	
الملز	80		+12		+4		170		250
		30		32		28	-5	0	
العليا	20		+5		30				50
		33		26		27		0	
أم الحمام	+3		40		100		-4		140
		27		25		30		0	
السليمانية	-1		160		+4		-3		160
الطلب	100		200		130		170		

5- الحل:

إلى \ من	**العليا v1=7**		**الملز v2=6**		**العقيق v3=16**		**منفوحة v4=9**		**العرض**
السويدي		17		16		16		9	
U1=0	+10		+10		10		40		50
أم الحمام		8		20		17		12	55
U2=1	20		+13		35		+2		
النسيم		15		10		20		25	45
U3=4	+4		35		10		+12		
الطلب	20		35		55		40		150

الفصل الثالث

أسلوب تقييم البرامج ومراجعتها وطريقة المسار الحرج

PROGRAM EVALUATION AND REVIEW TECHNIQUE

مقدمة

عادة ما تقوم الشركات الكبيرة بعمل مشاريع ضخمة ومعقدة، هذه المشاريع الكبيرة تتطلب العديد من العمليات والخطوات المتعاقبة أو المتوازية لإنجازها. فمثلاً عند صنع منتج جديد لينزل في الأسواق فإن هناك الكثير من الخطوات والعمليات التي يجب أن يمر بها المنتج الجديد هذا. فالمنتج الجديد يحتاج إلى بحوث سابقة وتطوير، اختبار المنتج، بحوث تسويقية، كيفية التغليف، وهكذا.

لذا فإن التحكم في تخطيط وتنفيذ المشروع بالوسائل القديمة أصبح مستحيلا. وفي هذه الحالة سيكون تركيز الإدارة المهتمة بتنفيذ المشروع في معرفة الوقت الذي سينتهي فيه إكمال ذلك المشروع. وحيث إنه يوجد كثير من المتغيرات والأحداث التي تؤثر على وقت نهاية المشروع، فإنه من الأهمية بمكان أن يوجد عندنا " كمدراء مشاريع مثلاً.." وسيلة اتخاذ قرارات تساعدنا على الإجابة على الأسئلة التالية:

1- متى نتوقع أن ينتهي المشروع؟

2- ما هو التأثير الكلي على المشروع إذا حدث تأخر في أي من العمليات أو الخطوات؟

3-ما هو الاحتمال أن يتم المشروع في وقته الذي خطط له؟

4-كم من التكاليف الإضافية ممكن أن نتحملها إذا أردنا أن نعجل بالمشروع قبل الوقت المحدد؟

أسلوب تقييم البرامج ومراجعتها "Program evaluation and review technique "PERT"وطريقة المسار الحرج "Critical path method "CPM" هما وسيلتين من وسائل التخطيط والتحكم في تنفيذ المشاريع الكبيرة وتستخدم للإجابة على الأسئلة السابقة. ولنجاح تلك الوسيلتين في التخطيط والتحكم فقد استُعملت في كثير من المشاريع العملاقة والحكومية والتجارية.

بدأ تطبيق أسلوب تقييم ومراجعة المشروعات (PERT) وطريقة المسار الحرج (CPM) منذ أواخر الخمسينيات في تخطيط المشروعات الكبيرة ومتابعة تنفيذها. ويعتمد أسلوب تقييم ومراجعة البرامج على تقسيم المشروع إلى عدد من الأنشطة التي تسبق ومجموعة من الأنشطة التي تتبع زمنيا ومجموعة من الأنشطة التي تنفذ في نفس الوقت، ويهتم هذا الأسلوب بالوقت المتوقع لإنهاء المشروع، ويمكن أن يدخل العنصر الاحتمالي في تقدير أوقات تنفيذ أنشطة المشروع، وتهتم طريقة المسار الحرج (CPM) بالإضافة إلى عنصر الوقت بعنصر التكلفة حيث يمكن تخفيض زمن تنفيذ المشروع بزيادة تكلفة تنفيذ بعض الأنشطة وتحديد الخطط البديلة لتخفيض زمن تنفيذ المشروع بأقل تكلفة ممكنة. وقد تم تطوير أسلوب تقييم ومراجعة البرامج وطريقة المسار الحرج (CPM) واندماجها وذلك في إطار ما يسمى بتحليل شبكات الأعمال Network Analysis.

أنشطة المشروع

ينظر إلى أي مشروع على أنه مجموعة من العمليات المتعاقبة والمتوازية، كل عملية من العمليات تسمى نشاطا. كل نشاط من الأنشطة يتطلب إنفاق شي من الوقت والموارد المالية.

ومن هنا كان تعريف النشاط (Activity) على أنه عملية أو مهمة تتطلب إنفاق بعض الوقت والموارد ليتم إنجازها.

مثال:

لبناء مدرسة من المدارس فإن الأنشطة اللازم عملها هي التالي:

A. عمل مخطط معماري
B. حفر القواعد
C. صب الأعمدة
D. بناء العظم أو الهيكل
E. صب الأدوار
F. أعمال الكهرباء
G. أعمال السباكة
H. الأعمال الداخلية والأعمال الأخرى من نوافذ وأبواب ودهان

كل من هذه الأنشطة يتطلب وقتا من الزمن ويتطلب موارد من عمال ومواد أولية وأموال. رمزنا لكل نشاط بحرف من الحروف للتسهيل، فنقول نشاط A ونشاط B. فمثلاً عمل مخطط معماري هو النشاط A، وحفر القواعد هو النشاط B وهكذا...

بعض الأنشطة ممكن أن تبدأ في وقت واحد، والبعض قد تبدأ بعد انتهاء أنشطة سابقة. فمثلاً لا نستطيع بناء العظم قبل الانتهاء من صب الأعمدة . لذلك فإنه لكل نشاط أو مهمة يجب أن يحدد بالضبط الأنشطة السابقة (Predecessor activities) .

تعريف: الأنشطة السابقة (Predecessor activities) وهي الأنشطة التي يجب إتمامها أولا ليبدأ نشاط معين.

لذلك فإن النشاط السابق للنشاط D " بناء العظم والهيكل " هو النشاط C. ونحن هنا لا ننظر إلى جميع الأنشطة التي يجب أن تسبق، إنما ننظر إلى النشاط أو الأنشطة السابقة مباشرة. فمثلاً اكتمال النشاط C معناه أن الأنشطة السابقة A وB جميعها قد اكتمل. لذلك لا نقول أن الأنشطة السابقة للنشاط D هي الأنشطة A وB وC . كذلك النشاط H يتطلب إنهاء كلا من G وF لان G لا يعتمد على F وهكذا.

وإذا أردنا معرفة وقت اكتمال المشروع فإنه يجب معرفة المدة " المتوقعة" لإنجاز كل نشاط.

تعريف: الوقت المتوقع هو عبارة عن المدة الزمنية اللازمة لإنجاز أي نشاط من الأنشطة. وتقاس عادة بالساعات، الأيام، الشهور، السنوات، أو بأي وسيلة أخرى مناسبة. ولكن يجب توحيد الوحدة المستخدمة للقياس في جميع الأنشطة. وبمعرفة الأنشطة، الأنشطة السابقة، والمدة المتوقعة لكل نشاط فإنه يمكن معرفة الوقت المتوقع الإجمالي لإنهاء المشروع باستخدام PERT .

وبما أن كل نشاط لا يمكن أن يبدأ حتى ينتهي النشاط أو الأنشطة السابقة له فإنه يمكن تعريف الحدث "event" على أنه:

نقطة أو لحظة من الوقت التي يتم فيها اكتمال مجموعة معينة من الأنشطة.

في المثال السابق، النشاط H لا يمكن أن يبدأ إلا بعد انتهاء النشاط E، F، وG .

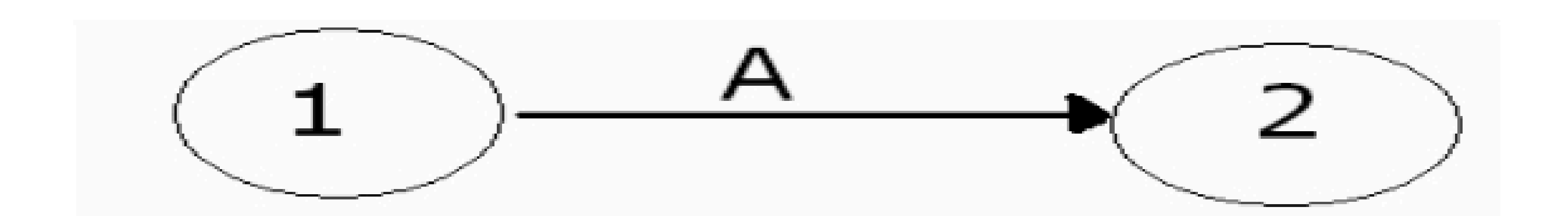
عندما يقع هذا الحدث فإنه يبدأ النشاط H. لذلك ممكن أن نرمز للأحداث هذه بالأرقام العربية التالية، مثلاً حدث 1، حدث 2، وهكذا..... فحدث 1 يكون بداية المشروع والحدث الأخير هو نهاية المشروع (أي أن جميع الأحداث قد انتهت).

شبكة أو خريطة PERT

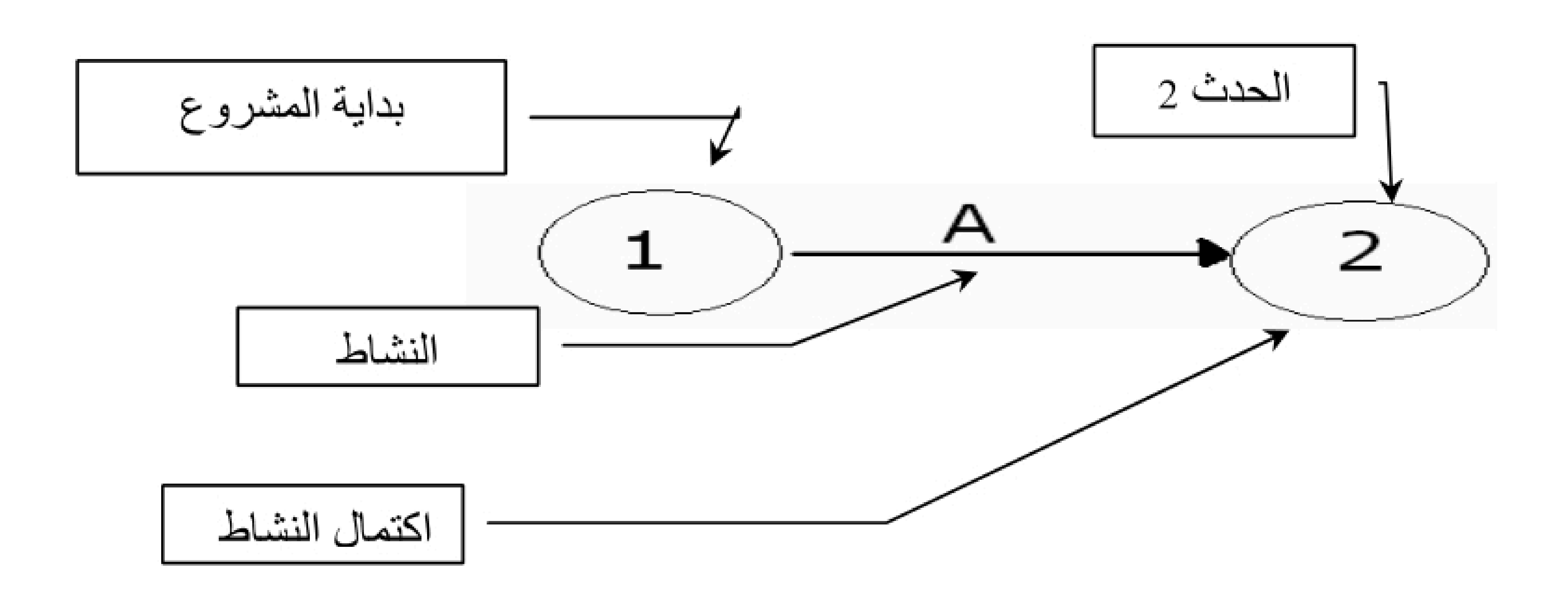
تعرف شبكة أو خريطة PERT على أنها عبارة عن رسم بياني أو نموذج شكلي يوضح تعاقب الأنشطة والحوادث اللازمة لإنهاء مشروع ما. هذه الشبكة تساعد المدير ومتخذ القرار في الشركة من رؤية الأنشطة والحوادث اللازمة لإنهاء المشروع بسهولة.

قاعدة: يجب تمثيل الأنشطة باسهم "←——" والأحداث بدوائر " ◯ ".

فمثلاً الشكل التالي يوضح بداية المشروع بالنشاط A:

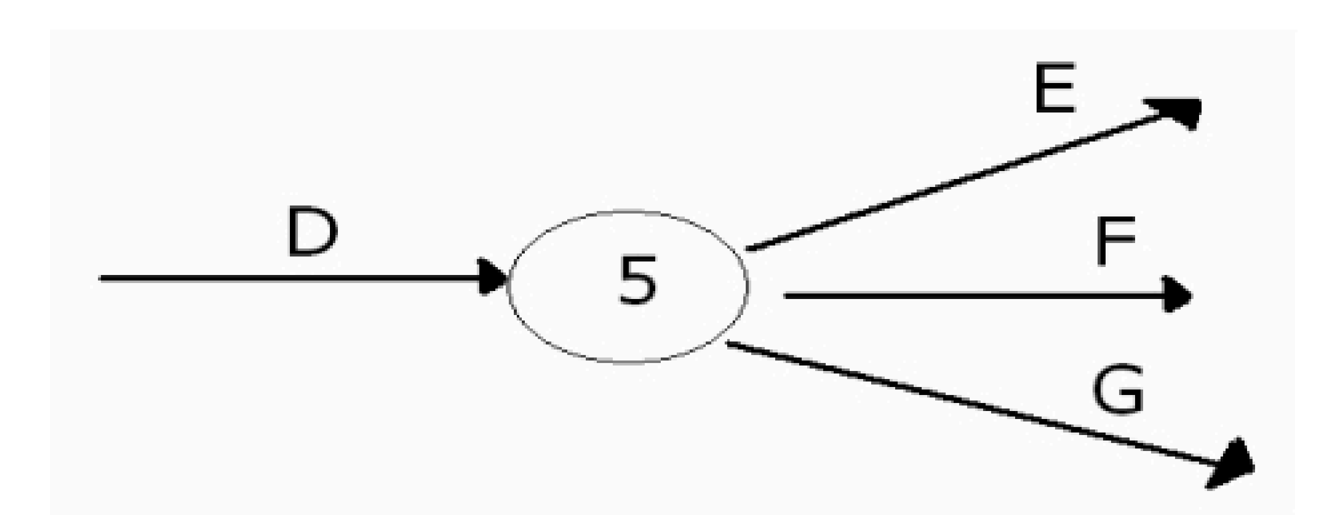


ويمكن توضيح الفرق بين الحدث والنشاط كالتالي:

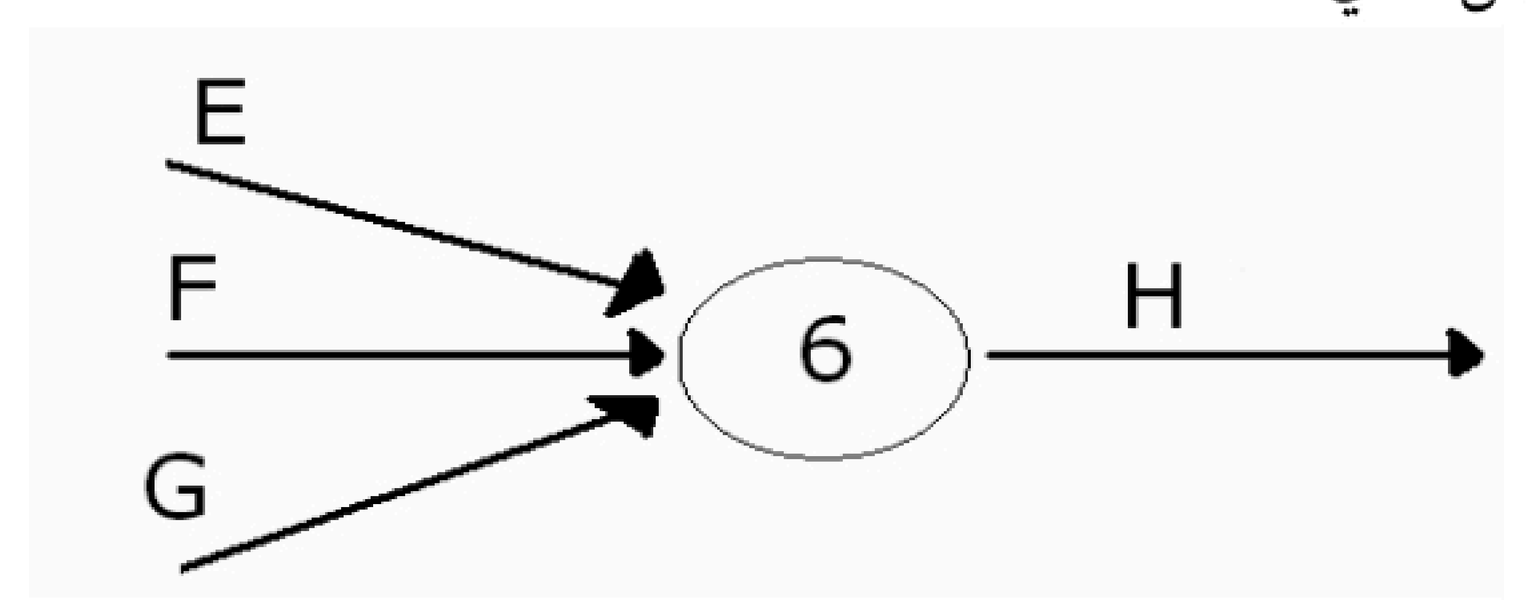


وبالمثل فإن الأنشطة E، F، وG لا يمكن أن تبدأ حتى ينتهي النشاط D .

هذا ممكن تمثيله بالشكل التالي:



كذلك النشاط H لا يمكن أن يبدأ حتى تنتهي الأنشطةE ، F، وG. وهذا يمكن تمثيله بالشكل التالي:



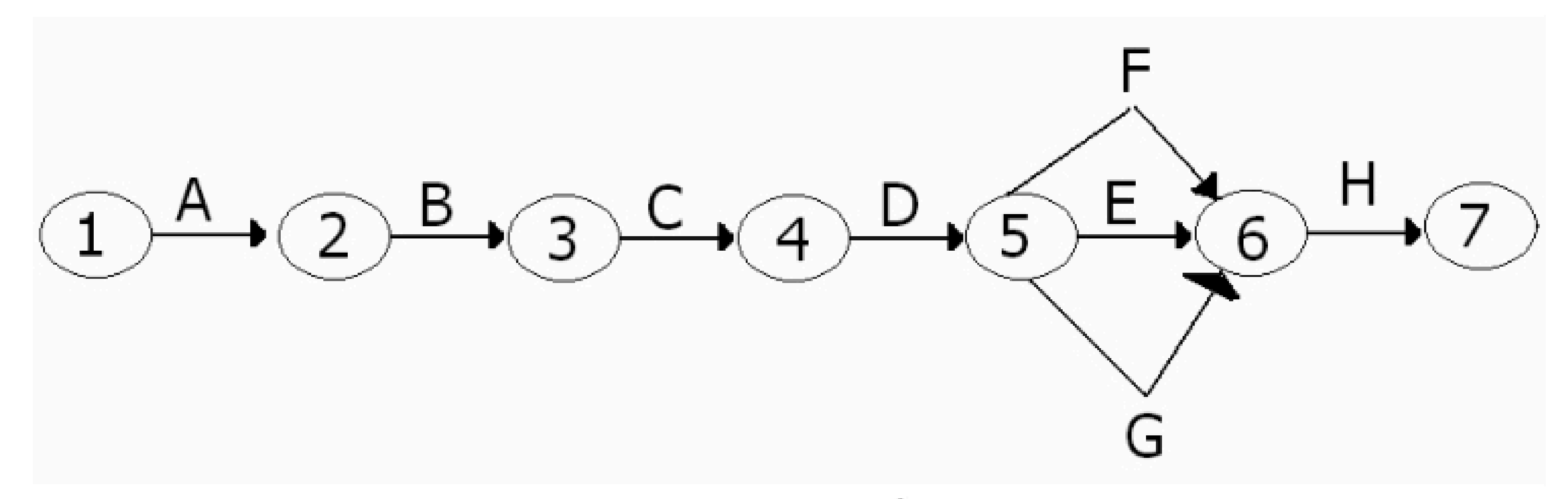
وعموما هناك حدث في بداية ونهاية كل نشاط.

والآن دعنا نرسم شبكة PERT لمشروع المدرسة السابق .

الأنشطة والأنشطة السابقة هي كما في الجدول التالي:

النشاط	الوصف	الأنشطة السابقة
A	عمل مخطط معماري	لا يوجد
B	حفر القواعد	A
C	صب الأعمدة	B
D	بناء العظم أو الهيكل	C
E	صب الأدوار	D
F	أعمال الكهرباء	D
G	أعمال السباكة	D
H	الأعمال الداخلية والأعمال الأخرى من نوافذ وأبواب ودهان	G, E, F

يمكن رسم شبكة PERT التي توضح العلاقة السابقة بالشكل التالي:



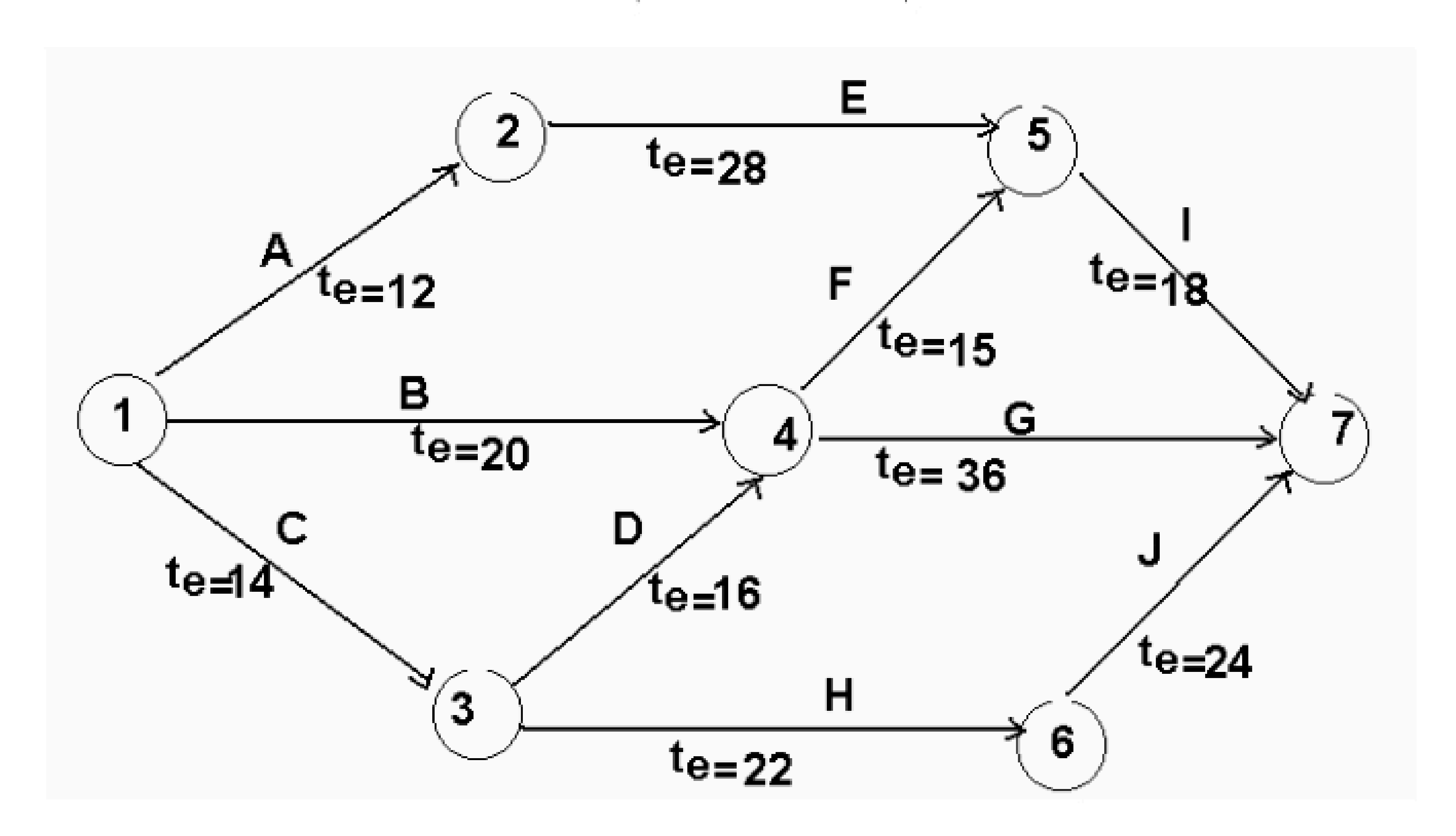
في الشبكة السابقة وضعنا 7 أحداث رئيسة للمشروع، حدث 1 هو بداية المشروع، بينما حدث 7 هو اكتمال المشروع.

الآن دعنا ننتقل إلى مثال أصعب قليلاً .

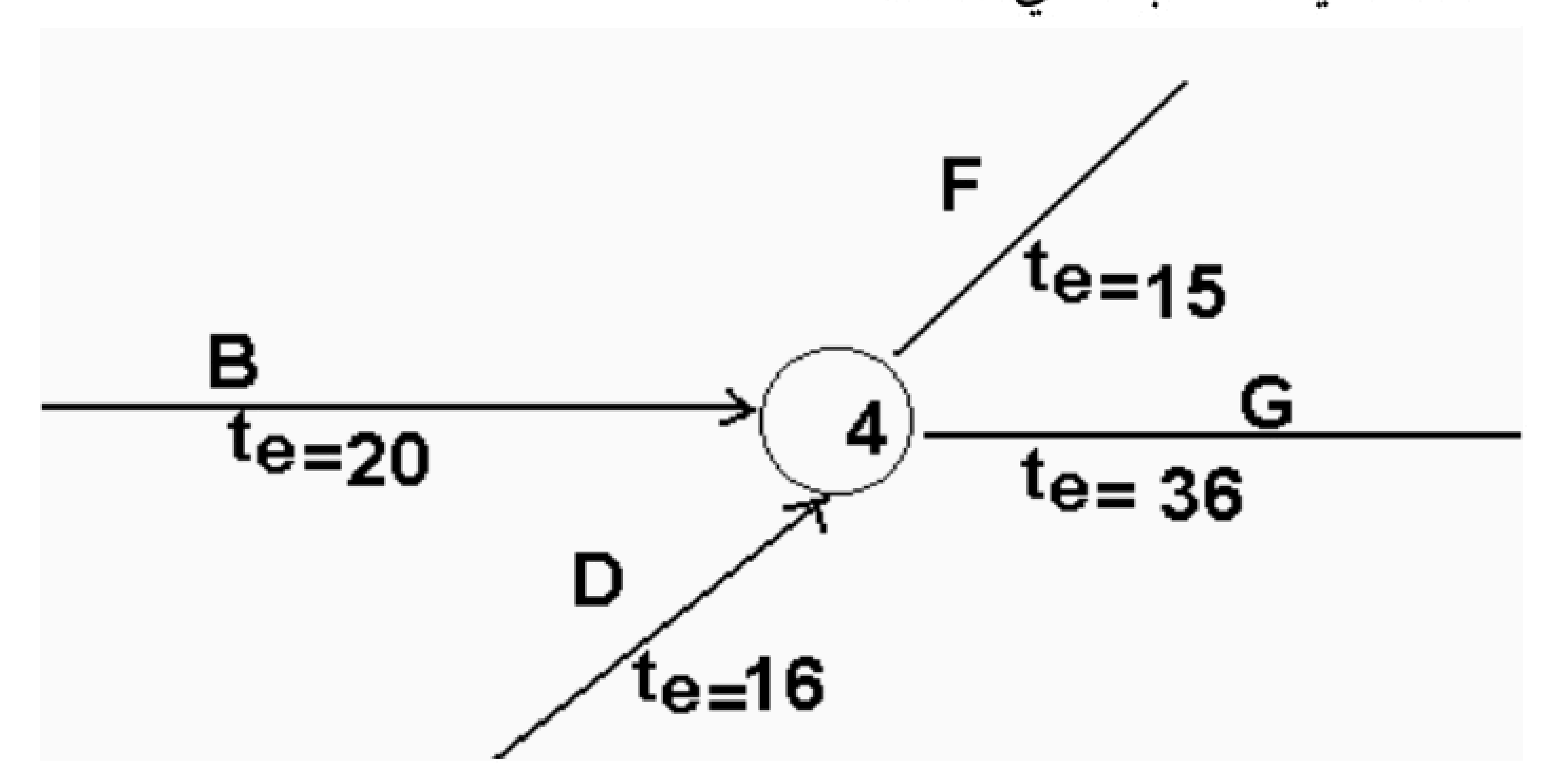
الجدول التالي يوضح كل نشاط والأنشطة السابقة والمدة المتوقعة الخاصة بشركة سدير والمطلوب رسم المشكلة وتحديد الأوقات المبكرة والمتأخرة للأنشطة والأحداث والأوقات الفائضة وحساب المسار الحرج والوقت المتوقع للانتهاء:

Expected duration (t_e) المدة المتوقعة	**الأنشطة السابقة**	**النشاط**
12	لا يوجد	A
20	لا يوجد	B
14	لا يوجد	C
16	C	D
28	A	E
15	D, B	F
36	D, B	G
22	C	H
18	E, F	I
24	H	J

وبذلك تكون شكل شبكة PERT



حيث إن الأنـشطة G وI وJ هما آخر الأنـشطة فإنها تنتهي بالحدث 7 (هـذه الأنشطة ليست سابقة لأي نشاط) :



كذلك لأن الأنشطة F، G تتحد في وجود الأنشطة B، و D كأنـشطة سـابقة فـإن الأنشطة B، و D يجب أن تنتهـي في الحـدث 4 والنـشاط F، G تبـدأ مـن حيـث انتهـى الحدث 4 .

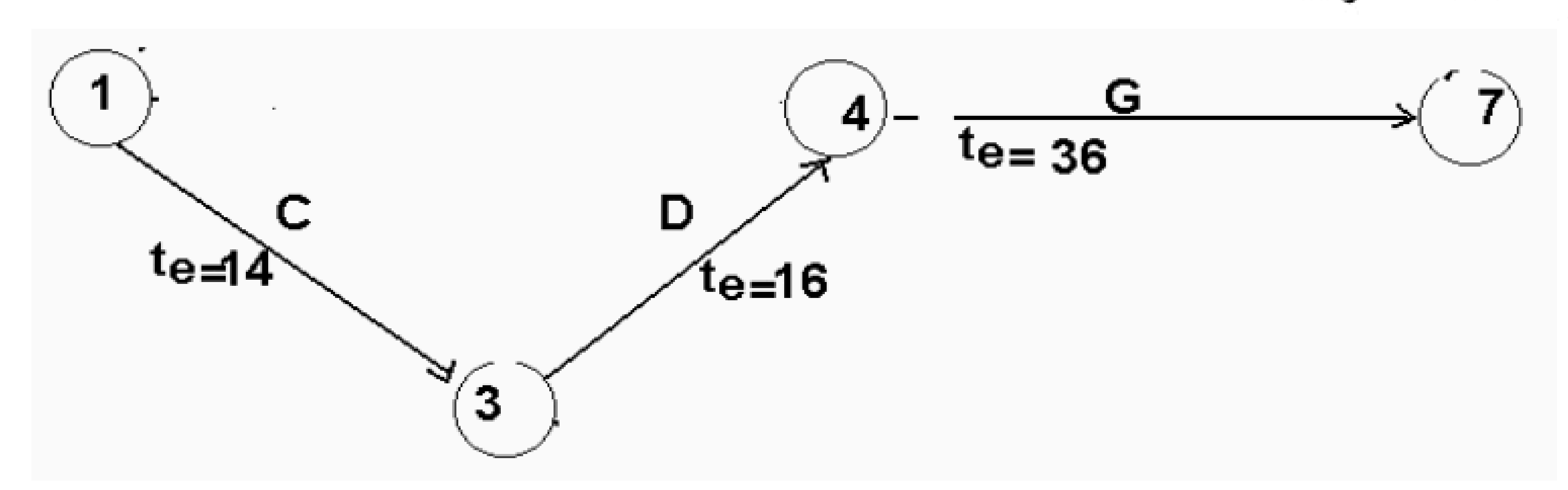
كما يلاحظ أننا وضعنا المدة المتوقعة لإنهاء كل نشاط بجوار النشاط الخـاص بـه وذلك للتسهيل.

المسارات أو الطرق Paths في شبكة PERT

من الأسئلة المهمة التي يجب أن نجيب عليها هو متى نتوقع الانتهاء بالكامل من المشروع، ومن إحدى الطرق التي تساعدنا على ذلك هو معرفة المدة المتوقع أخذها لإنهاء جميع المسارات.

تعريف المسار Path

هو عبارة عن نشاطات متتابعة والتي تربط بين حدث البداية (الحدث 1) وحتى حدث النهاية (في مثالنا الحالي الحدث 7، هو حدث النهاية). الشكل التالي يعطي مثالا لأحد المسارات.



الجدول التالي يوضح جميع المسارات الممكنة والمدة المتوقعة لكل مسار:

المدة " Duration"	المسار "Path"	رقم المسار "Path Number"
58=18+28+12	A-E-I	1
53=18+15+20	B-F-I	2
56=36+20	B-G	3
63=18+15+16+14	C-D-F-I	4
66=36+16+14	C-D-G	5
60=24+22+14	C-H-J	6

مثلاً المسار السابق، يتكون من الأنـشطة C-D-G وكـذلك الأحـداث 1، 3، 4، 7 وهو يستغرق حوالي 66 يوماً. ولكن اكتمال الأنشطة C-D-G لا يعنى اكـتمال المـشروع، وذلك لأنه يجب أن تنتهي جميع الأنشطة . ولكن إذا أخذنا المدة المتوقعة لإكـمال جميـع المسارات (كل واحد على حدة) وكما فعلنا في الجدول الـسابق فـإن أطـول مـسار مـن المسارات يكون هو المدة المتوقعة للانتهاء. لذلك فإن المسار رقـم 5 هـو المـسار الـذي يتطلب وقتا أطول " 66 يوماً " ومنه نقول أن المدة اللازمة لإكمال المشروع هي 66 يوماً من بداية المشروع.

في الحياة العملية من الصعب إيجاد جميع المـسارات وحـسابها، ومـن ثـم معرفـة الوقت اللازم لإكمال المشروع. ولكن أسلوب PERT هو أسلوب أكثر سهولة وأفضل طريقة علمية لحل المشاكل الكبيرة.

الوقت المتوقع للانتهاء

Expected Time of Completion

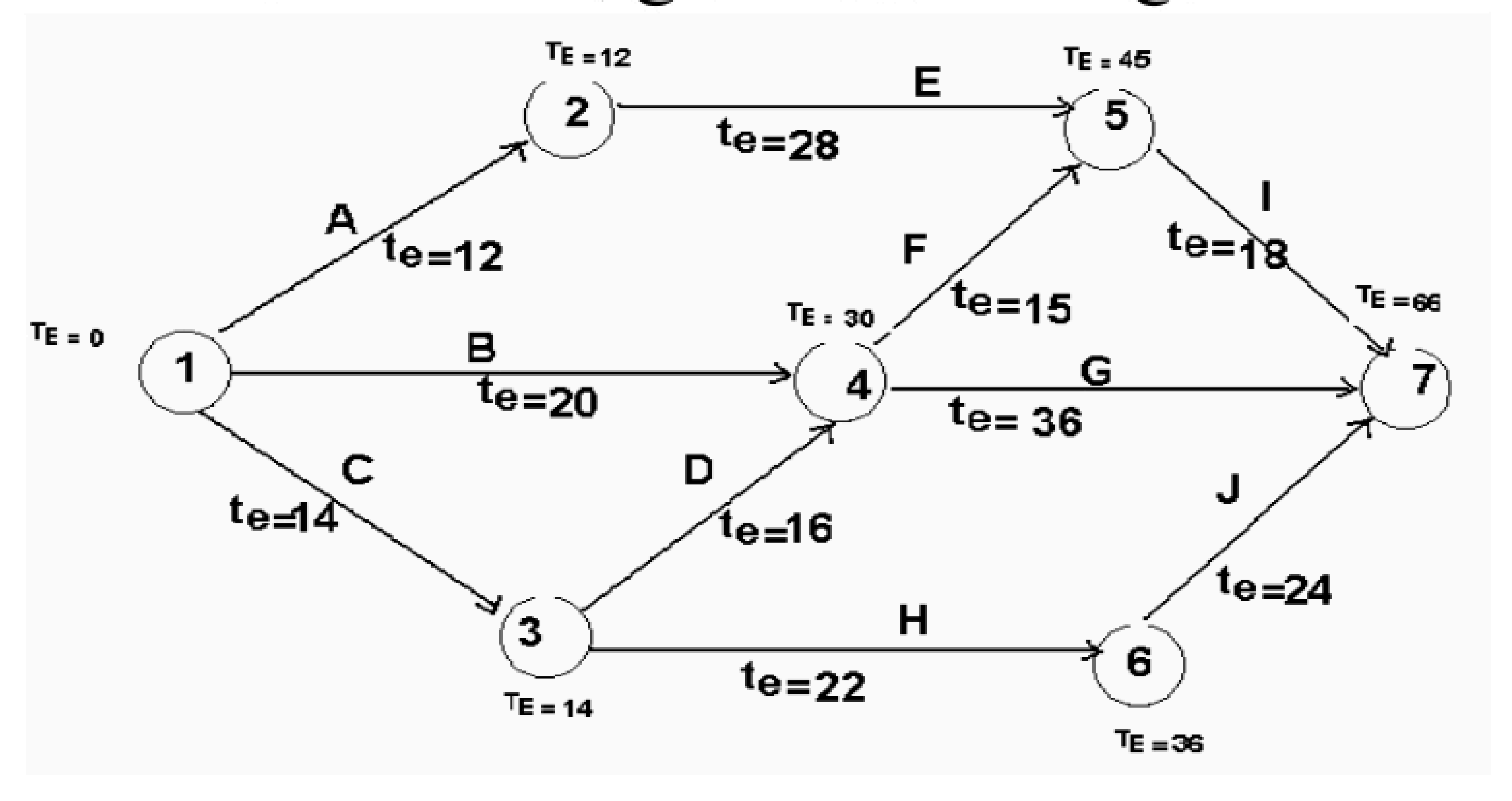
من الأسئلة المهمة هو معرفة الوقت المتوقع لإنهاء كل نشاط وكل حدث، والتي بناء عليها يأتي التعريف التالي:

تعريـف: T_E ترمـز لأبكـر لحظـة مـن الـزمن والتـي يكتمـل فيهـا نـشاط معين. وبالمثل فإن T_E ترمز إلى أبكر لحظة مـن الـزمن والتـي يقـع فيهـا حـدث معـين (أي أن جميع الأنشطة التي تنتهي بهذا الحـدث قـد اكتملـت)، الوقـت المبكـر المتوقـع "Earliest Expected time " استخدمت لأننا نتوقع إنهاء تكتمل قبل ذلك.

الجدول التالي يوضح الوقت المبكر المتوقع T_E للانتهاء من كل نشاط:

Earliest Expected Completion time (T_E)	النشاط	Earliest Expected Completion time (T_E)	النشاط
45	F	12	A
66	G	20	B
36	H	14	C
63	I	30	D
60	J	40	E

والوقت المبكر لوقوع الأحداث هو كما هو موضح في شبكة PERT التالية:



لحساب الوقت المبكر المتوقع للأحداث يجب وضع الصفر في البداية (T_E)، لذلك فإن كل الأوقات المبكرة لوقوع الحدث تفسر على أنها عدد الأيام أو الساعات التي مضت منذ بداية المشروع. فمثلاً الحدث 6 ($T_E = 36$) أي انه أبكر وقت متوقع لوقوع الحدث 6 هو 36 يوماً من بداية المشروع.

كذلك الوقت المبكر المتوقع لآي نشاط هو عبارة عن الوقت المتوقع للنشاط نفسه+ الوقت المبكر لوقوع حدث البداية . أي أن:

T_E للنشاط A = 0+ 12 = 12

T_E للنشاط B = 0+ 20 = 20

T_E للنشاط F = 30+ 15 = 45

وهكذا..

كذلك T_E للحدث 4 يقع عندما تكتمل جميع الأنشطة السابقة وهي B وكذلك D. فمثلاً النشاط B ينتهي بعد 20 يوماً ولكن النشاط D ينتهي بعد 30 يوماً، لذلك فإن الوقت المبكر المتوقع لوقوع الحدث 4 هو 30 يوماً. وهكذا لجميع الأحداث.

لاحظ أن الحدث 7 هو عبارة عن اكتمال الأنشطة I، G، وJ. لذلك فالنشاط الذي يأخذ وقت أطول للانتهاء منه هو أبكر وقت يتم فيه الحدث 7، وهو 66. وهو عبارة عن المسار الأطول أو المسار الحرج.

الوقت المتأخر المسموح به Latest Allowable Time

حيث إن T_E هي عبارة عن مدة متوقعة، فإن الوقت المبكر لإنهاء الأنشطة أو الوقت المبكر لوقوع أيا من الأحداث سيكون توقع فقط. لذلك فإن بعض الأنشطة قد تأخذ وقت أطول من الوقت المتوقع وبالتالي سيؤثر على المشروع بأكمله. ومعرفة الوقت المتأخر المسموح به لإنجاز أي نشاط أو لوقوع أي حدث مهم جدا. لان معرفة الوقت المتأخر المسموح به ستوضح لنا فيما إذا كان التأخير في نشاط أو حدث معين سيؤثر على تأخر المشروع بأكمله أم لا. سنرمز للوقت المتأخر المسموح به بالرمز (T_L).

تعريف: T_L لنشاط معين من الأنشطة، هو عبارة عن آخر لحظة من الزمن يسمح به لإنجاز النشاط هذا بحيث لا يؤثر على تأخر اكتمال المشروع عن المدة المتوقعة الأصلية.

كذلك T_L لحدث معين من الأحداث، هـو عبـارة عـن آخـر لحظـة مـن الـزمن يسمح به لوقوع الحدث هذا بحيث لا يؤثر على تأخر اكتمال المشروع عن المدة المتوقعـة الأصلية. الجدول التالي يوضح الوقت المتأخر المسموح به للأنشطة:

Latest Allowable (T_L) الوقت المتأخر المسموح به	Earliest Expected Completion time (T_E) الوقت المبكر المتوقع	النشاط
20	12	A
30	20	B
14	14	C
30	30	D
48	40	E
48	45	F
66	66	G
42	36	H
66	63	I
66	60	J

لحساب قيم (T_L) فأننا نبدأ من الحدث النهائي (حدث 7، أي 66 يوماً) ونرجع إلى الأمام باتجاه البداية . وT_E للحدث الأخير (حدث 7 في هذا المثال) هو دائما يساوي (T_L) لنفس الحدث . أي أن $T_E = T_L = 66$ يوماً. ونرجع إلى الأمام لحساب قيم T_L الباقية.

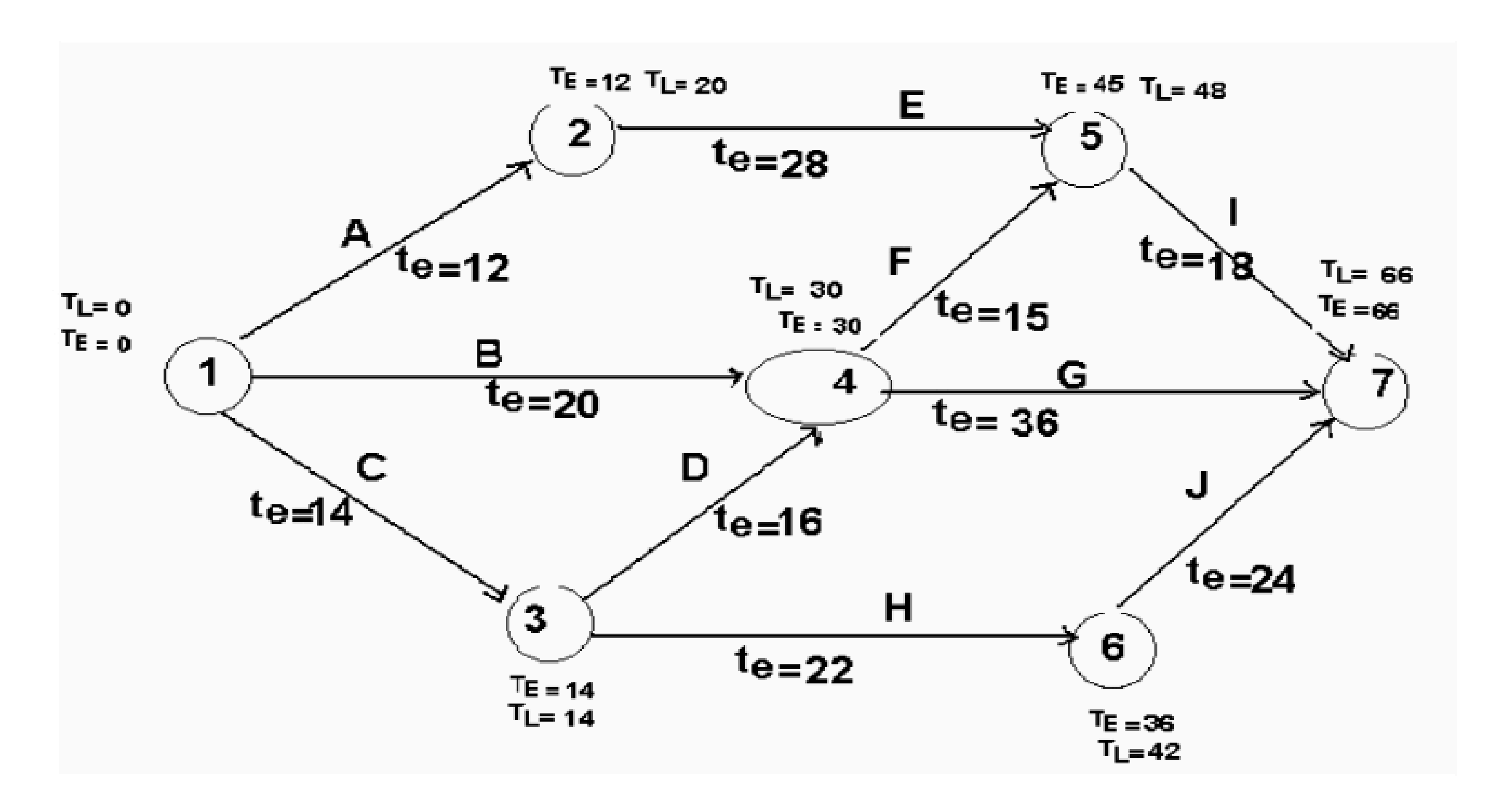
قاعدة : الوقت المتأخر المسموح به (T_L) لأي نشاط من الأنشطة هي عبارة عن الوقت المتأخر المسموح به (T_L) للحدث الذي ينتهي فيه ذلك النشاط.

إذا افترضنا أن النشاط J مثلاً لم يبدأ حتى اليـوم ال 43 فهـل ذلـك سـيؤثر عـلى المشروع؟

إذا نظرنا إلى الوقت المتأخر المسموح به (T_L) للحدث 7 وكذلك النشاط J هو 66 يوماً، والمدة المتوقعة اللازمة لإنجاز النشاط J هي 24 يوماً. لذلك فإن النشاط J

يجب أن يبدأ في موعد أقصاه هو 66 —24 = 42 (أي أن الوقت المتأخر المسموح به (T_L) للحدث 6 هو 42 يوماً) وإلا أثر ذلك على إكمال المشروع في الوقت المحدد. لذلك إذا بدأ النشاط J في اليوم الـ 43 فإن المشروع يتوقع أن ينتهي ليس قبل 43+ 24 =67 يوماً، أي بتأخر يوماً واحداً عن الموعد المتوقع لوقوع الحدث 7 .

شبكة PERT التالية توضح أيضا الوقت المتأخر المسموح به (T_L) للأحداث.



كذلك وبنفس الطريقة يمكن حساب الوقت المتأخر المسموح به (T_L) للحدث 5 . فإن الوقت المتأخر المسموح به (T_L) للحدث 5 عبارة عن 48=18-66 (المدة اللازمة لإنجاز النشاط I تساوي 48 يوماً).

حساب الوقت المتأخر المسموح به (T_L) للحدث 4 قد يكون أصعب قليلاً؛ وذلك لأن النشاط F وكذلك النشاط G تبدأ من الحدث 4 . لذلك فإن الحدث 4 يجب أن يبدأ مبكرا بما فيه الكفاية ليسمح لكلا النشاطين من الانتهاء قبل الوقت المتأخر المسموح به لكلا منهم.

الوقت المتأخر المسموح بـه (T_L) للنـشاط F = 48، والمـدة المتوقـع أن يأخـذها النشاط هذا هي 15 يوماً، لذلك فإن النشاط F يجب أن لا يتأخر عن اليوم 33 يوماً وهو الفرق بين 48 وبين 15 .

كذلك فإن الوقت المتأخر المسموح به (T_L) للنشاط G= 66، والمـدة المتوقـع أن يأخذها النشاط هذه هي 36 يوماً، لذلك فإن النشاط G يجب أن لا يتأخر عن 30 يومـاً (66-36).

و لحساب الوقت المتأخر المسموح به (T_L) للحدث 4 فأننا نأخذ الوقـت الأقـل من بين الأوقات التي يجب أن لا تتأخر عنها الأنشطة التي تبدأ من ذلـك الحـدث (أي الأقل من بين 33، 30 يومـاً) . أو بـصيغة أخـرى min (30,33)، أي أن الوقـت المتـأخر المسموح به (T_L) للحدث 4 يكون 30 يوماً.

افترض أن الحدث 4 وقع في اليوم ال 31، مـاذا سـيكون التـأثير عـلى النـشاط F وكذلك النشاط G ؟

النشاط F لن يتأثر بهذا؛ وذلك لأن النشاط F يجب أن لا يتأخر عن 33 يوماً.

أما النشاط G فسوف يتأثر بهذا؛ وذلك لأن النشاط G يجب أن لا يتأخر عـن 30 يوماً، أي سيتأخر بيوم واحد مما يؤدي إلى نهاية المشروع بأكمله بيوم واحد.

باستخدام نفس الطريقة فأننا نستطيع الحصول على الوقت المتأخر المـسموح بـه (T_L) لكل الأحداث الباقية . ويجب أن تكون قيمة الوقت المتـأخر المـسموح بـه (T_L) للحدث الأول (البداية) دائما تساوي (T_E) وتساوي الصفر.

الوقـت المتـأخر المـسموح بـه مـن المعلومـات المهمـة والتـي تـساعدنا في معرفـة الأنـشطة التـي يجـب أن لا تتـأخر عـن الموعـد المحـدد، وإلا فـإن المـشروع بأكمله سيتأخر.

فمثلاً بعد أن بدأنا المشروع وجدنا أن النشاط B لن ينتهي إلا بنهاية اليوم ال 25 بدلا من اليوم المحدد أي اليوم 20 . هل سيؤثر ذلك على المشروع ككل؟

الجواب طبعا بلا؛ وذلك لأن الوقت المتأخر المسموح به (T_L) للحدث 4 (وأيضا للنشاط B) هو 30 يوماً. ولا يوجد أي مشكلة بانتهاء النشاط B حتى اليوم الـ 30.

إذا طريقة PERT تستطيع إعطائك الكثير من المعلومات الضرورية للتحكم في المشروع.

الفائض (Slack)

من الأسئلة المهمة التي من الممكن أن يجيب عليها أسلوب PERT هو معرفة المدة التي يمكن أن يتأخر فيها نشاط أو حدث بدون أن يسبب ذلك التأخير في النشاط أو الحدث إلى تأخير في المشروع بأكمله. هذه المدة التي يمكن أن يتأخر فيها نشاط أو حدث بدون أن يسبب ذلك التأخير في النشاط أو الحدث إلى تأخير في المشروع بأكمله، تسمى الأوقات الفائضة.

كيف يتم حساب الأوقات الفائضة؟

تعريف: الوقت الفائض لنشاط أو حدث معين (ونرمز له بالرمز s) هو الفرق بين الوقت المتأخر المسموح به(T_L) للحدث أو النشاط والوقت المبكر (T_E) لهذا الحدث أو النشاط. أي انه = ($T_L - T_E$)

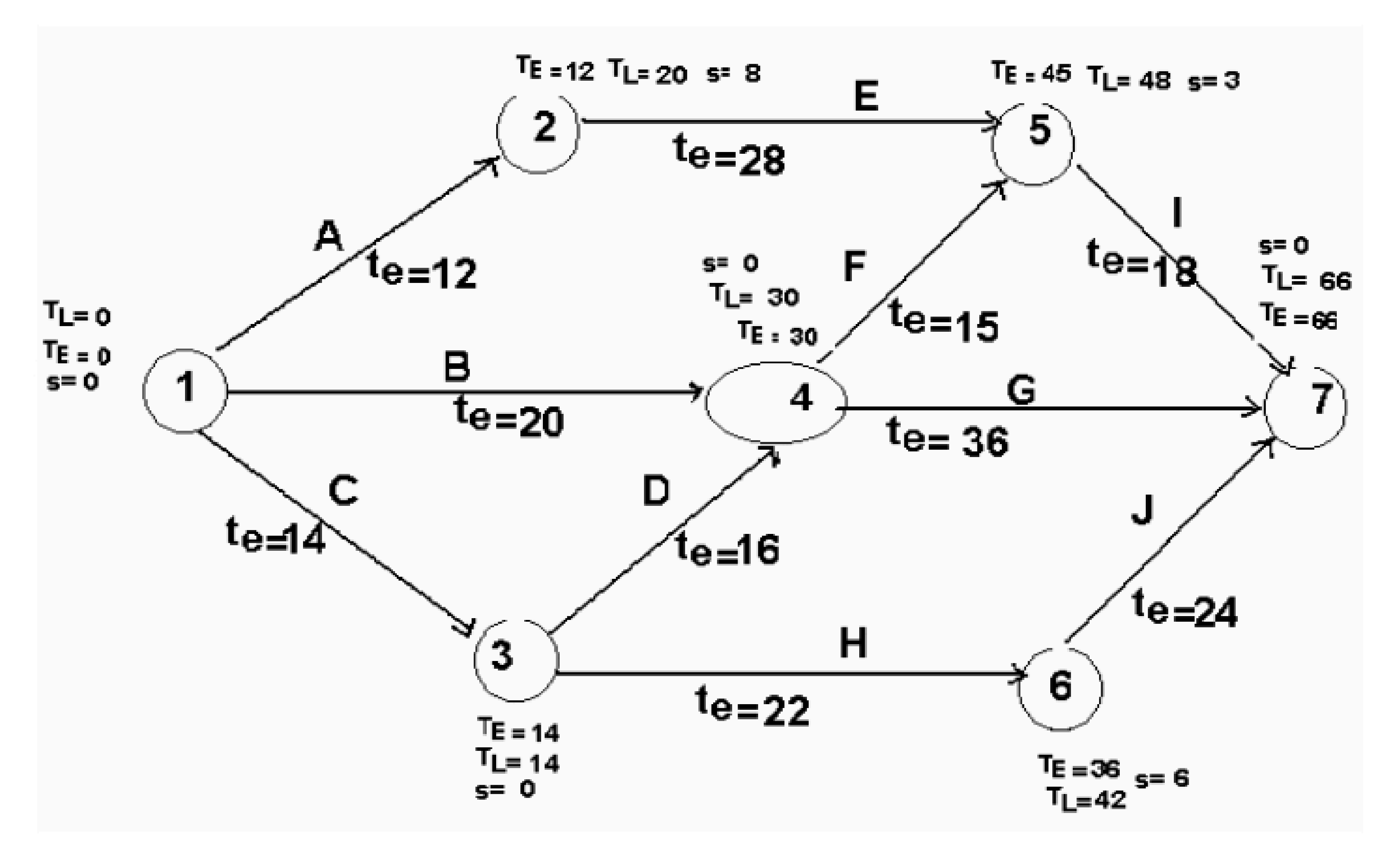
يفسر الوقت الفائض لنشاط ما على أنه المدة الزائدة عن الوقت المتوقع (t_e) التي ممكن أن يأخذها نشاط معين بدون أي تأثير على المشروع بأكمله.

ويفسر الوقت الفائض لحدث ما على أنه المدة الزائدة عن الوقت المبكر لوقوع الحدث (T_E) والتي ممكن أن يقع فيها حدث معين بدون أي تأثير على المشروع بأكمله.

الجدول التالي يوضح الأوقات الفائضة للأنشطة:

النشاط	Earliest Expected Completion time (T_E) الوقت المبكر المتوقع	Latest Allowable (T_L) الوقت المتأخر المسموح به	الأوقات الفائضة Slacks ($T_L - T_E$)
A	12	20	8
B	20	30	10
C	14	14	0
D	30	30	0
E	40	48	8
F	45	48	3
G	66	66	0
H	36	42	6
I	63	66	3
J	60	66	6

الأوقات الفائضة لكل حدث من الأحداث هو كما في الشبكة التالية:



الوقت الفائض لنشاط E هو 8 أيام. ذلك يعني أن النشاط E ممكن أن يتأخر 8 أيام زيادة عن المدة المتوقعة (te)، أي يأخذ إنجازه 28 + 8 = 36 يوماً. أو أن النشاط

ممكن أن يتأخر 8 أيام عن بدايته . كذلك الوقت الفائض للحدث 3 يوضح لنا أنه من المستحيل أن يتأخر الحدث عن الوقت المبكر للحدث (T_E =14) وآي تأخر في هذا الحدث يعني تأخر في المشروع ككل.

المسار الحرج The Critical Path CPM

المسار الحرج هو عبارة عن الأنشطة المتلاحقة والتي تكون في مجموعها أطول فتره ممكنة من البداية وحتى النهاية. وبالنظر إلى شبكة PERT السابقة يتضح أن الأنشطة C→D→G تكون المسار الحرج لهذا المشروع. في السابق تعرفنا على المسار الحرج وذلك بجمع فترات الأنشطة اللازمة لجميع المسارات الممكنة، ولكن باستخدام أسلوب PERT فإننا لا نحتاج لأن نحسب جميع المسارات، إذ إنه بالسهولة يمكن تحديده.

جميع الأنشطة التي فائضها يساوي الصفر، لا يمكن تأخيرها عن موعدها المحدد وإلا فإن ذلك سيؤثر على المشروع بأكمله. ولذلك فإن هذه الأنشطة هي التي تحدد المدة المتوقعة لإنهاء المشروع وكذلك المسار الحرج.

قاعدة : المسار الحرج يتكون من الأنشطة التي لا يوجد بها فوائض في الأوقات أي (s=0) . الأحداث التي لا يوجد بها فوائض (أي أن فوائضها تساوي أصفاراً) تكون تقع على المسار الحرج.

وبتطبيق هذه القاعدة على شبكة PERT نجد أن الأنشطة التي لا يوجد بها فوائض هي الأنشطة C، D، والنشاط G. ولذلك فإن المسار الحرج يمر بهذه الأنشطة. كذلك فإن الأحداث التي يوجد بها فوائض هي الأحداث 1، 3، 4، وكذلك 7 . وهذه الأحداث تربط الأنشطة C، D، والنشاط G لتكوين المسار الحرج.

وعموماً فإن الأشخاص الذين يعملون في المشروع ستكون علاقتهم قوية بأنشطة معينة وليس لهم علاقة بالأحداث، لأن الأحداث ستكون من تخصص مدير المشروع ومحلل شبكة PERT.

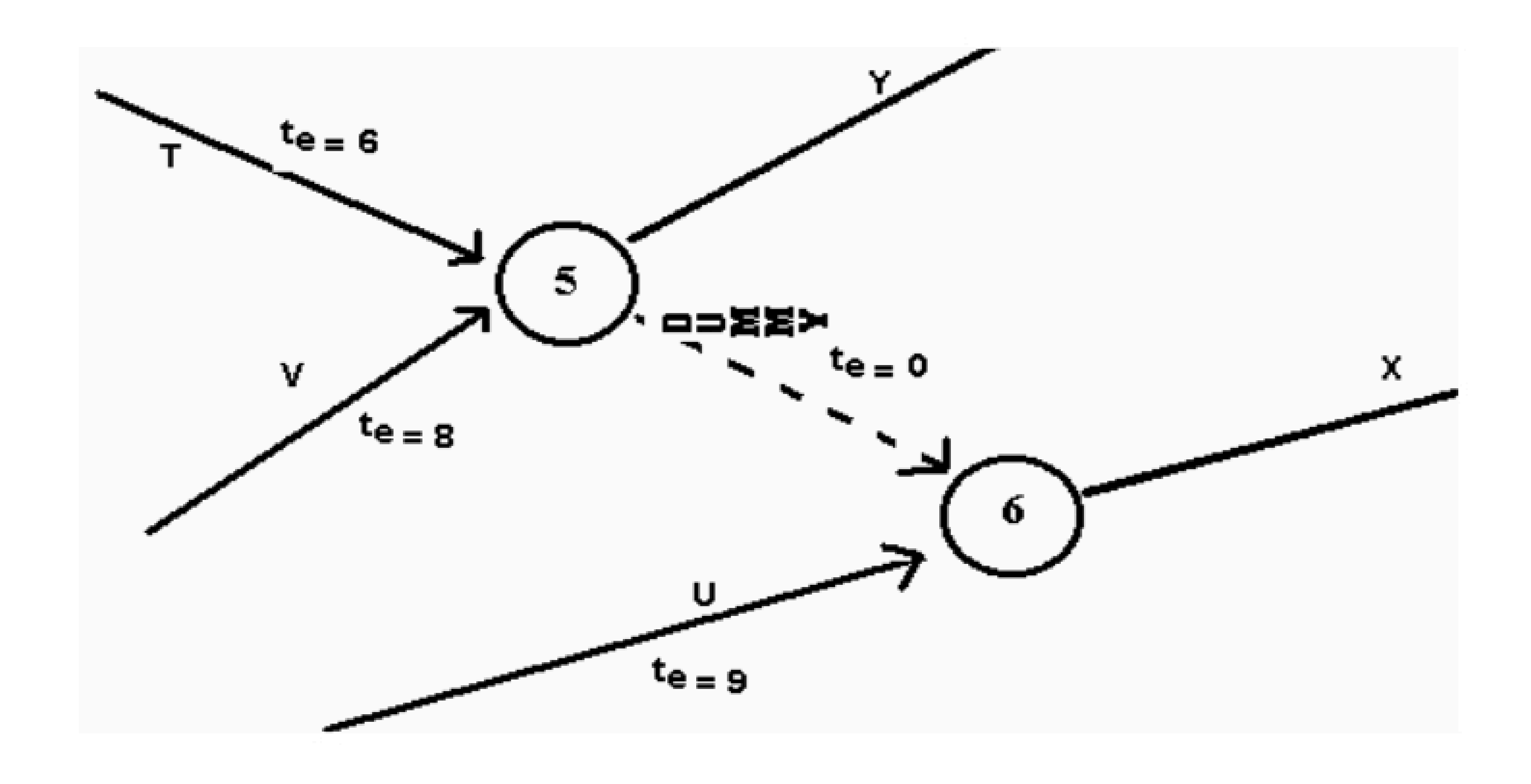
لذلك فإنه بالأهمية بمكان الاهتمام بالأنشطة التي تقع على المسار الحرج ويجب ملاحظتها بعناية أكبر والتركيز عليها والتحكم في أوقاتها حتى لا يتأخر المشروع بأكمله.

الأنشطة الوهمية Dummy Activities

في بعض الحالات نجد أن أنشطة معينة تشارك بعضها البعض في بعض الأنشطة السابقة وليس كلها. انظر إلى الجدول التالي:

النشاط	الأنشطة السابقة
X	T , U, V
Y	T , V

في هذه الحالة فإننا لا نستطيع أن نضع حدث واحد ينتهي فيه V , U, T ويكون بداية لنشاط X ونشاط Y . وذلك لان نشاط Y لا يحتاج لنشاط U أن يتم قبله كنشاط سابق. وفي هذه الحالة يجب أن نضع نشاط وهمي ((Dummy Activity ونعطيه صفراً من الزمن (أي أن $t_e = 0$) ويوضع على شكل خط متقطع في شبكة PERT الرسم التالي يوضح هذه الحالة:



وبافتراض أن المدة المتوقعة للنشاط $T = 6$, $V=8$, $U = 9$ فإنه بمجرد أن يقع الحدث 5 (مثلاً) فإن الحدث 6 سيقع مباشرة إذا كان النشاط U قد اكتمل . أي أن الحدث 6 سيقع متى ما انتهت جميع الأنشطة الثلاثة.

الأنشطة الوهمية تعامل معاملة الأنشطة العادية الأخرى، وحيث إن المدة اللازمة لإنجازها دائما يساوي الصفر فإن هذه الأنشطة الوهمية من المستحيل أن تتسبب في تأخير المشروع.

جدولة الأوقات Schedule Times

في حالات كثيرة في الواقع يجب أن ينتهي بناء المشروع في مدة محددة . مثلاً، صاحب الشركة يريد أن ينتقل إلى المقر الجديد في تاريخ معين، والانتهاء من بناء المقر في ذلك الوقت يكون بالأهمية بمكان في المثال السابق

تعريف: T_S ترمز للوقت المتأخر المسموح به لإكمال نشاط معين أو حدث معين بدون تأخير في المشروع بأكمله عن التاريخ المحدد له.

تعريف : S_S هو الفائض الثاني ($T_L - T_S$) وهو عبارة عن الفرق بين الوقت المتأخر المسموح به لإكمال نشاط أو حدث معين بدون التأثير على التاريخ المحدد لتسليم المشروع – الوقت المتأخر المسموح به لإكمال نشاط أو حدث معين بدون التأثير على التاريخ المحدد لاكتمال المشروع.

لذلك فإن T_S للحدث الأخير يساوي تاريخ التسليم أو التاريخ المقرر أن ينتهي فيه المشروع . جميع قيم T_S للأحداث الأخرى ستحسب بدقة إذا استخدمنا تاريخ التسليم كأساس لحساب الأحداث الأخرى.

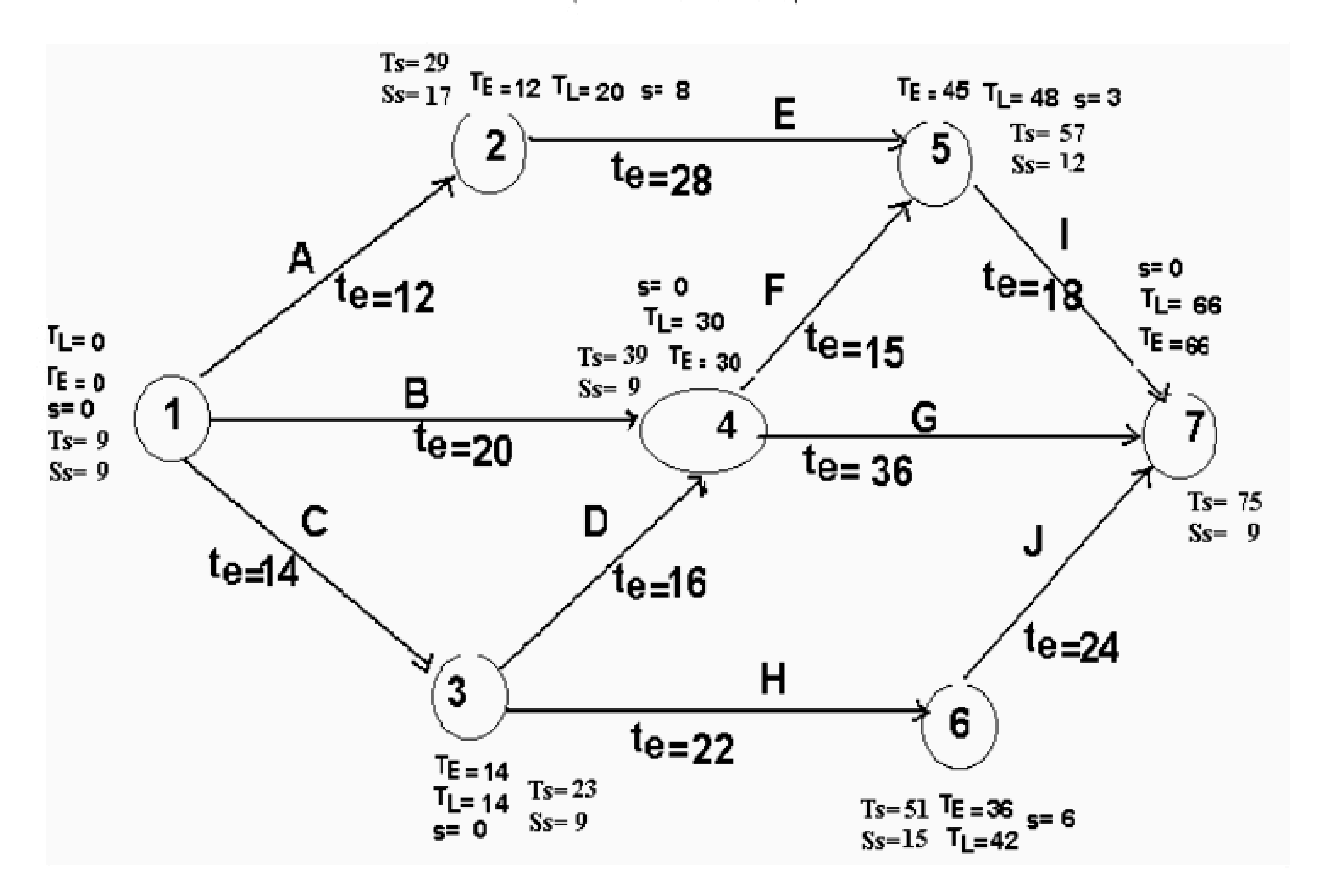
مثلاً افترض أن المشروع والذي نحن بصدده مطلوب له أن ينتهي قبل اليوم الـ 75 . والمشروع كما قدرنا يتطلب فقط 66 يوماً لإنهائه. لذلك فإن كل قيم T_S هي عبارة

عن قيم T_L التي حصلنا عليها من قبل بعد إضافة 9 (وهي 75−66 =9) أيام ($T_S = T_L + 9$) وكذلك فإن الفوائض الثانية هي عبارة عن الفوائض الأولى بعد إضافة 9 أي أن ($S_S = s+9$) قيم S_S وكذلك قيم T_S لجميع الأنشطة هي كما يلي:

Schedule (S_S) $S_S = T_S - T_E$	Schedule (time T_S) $= T_L + 9$	الأوقات الفائضة Slacks ($T_L - T_E$)	Latest Allowable (T_L) الوقت المتأخر المسموح به	Earliest Expected Completion time (T_E) الوقت المبكر المتوقع	النشاط
17	29	8	20	12	A
19	39	10	30	20	B
9	23	0	14	14	C
9	39	0	30	30	D
17	57	8	48	40	E
12	57	3	48	45	F
9	75	0	66	66	G
15	51	6	42	36	H
12	75	3	66	63	I
15	75	6	66	60	J

القيمة 9 للحدث 1 (حدث البداية) تفسر على أننا بإمكاننا أن نبدأ في اليوم التاسع وليس الآن ومع ذلك نستطيع أن نكمل المشروع قبل اليوم ال 75، إذا ما تم كل نشاط حسب المقدر له.

الشبكة التالية توضح قيم S_S وكذلك قيم T_S لجميع الأحداث:



استخدام الأوقات المقدرة Variable Time Estimate

المدة التي استخدمناها لكل نشاط في السابق هي عبارة عن توقع وتخمين وليس شيء مؤكد. وفي الحقيقة أن الأنشطة قد لا تأخذ نفس الفترة التي افترضناها. في بعض الأحيان قد تأخذ وقتاً أطول أو اقصر من الفترة المتوقعة. لذلك، فلكي يكون توقعنا أقرب إلى الحقيقة، فإنه يجب استخدام بعض التوزيعات الاحتمالية. ومن أفضل التوزيعات الاحتمالية على الإطلاق في هذا المجال، والذي يتناسب استعماله مع طبيعة طول الفترة الزمنية التي يتطلبها إنجاز نشاط من الأنشطة، هو توزيع "beta " .

افترض أننا وضعنا ثلاث فترات لتقدير الزمن اللازم (t_e) بدلا من تقدير واحد.

1- التقدير المتفائل Optimistic estimate

وهي أقصر فترة ممكنة، بحيث إن الفترة الصحيحة التي يأخذها نشاط معين يجب أن تكون أطول من هذا التقدير بنسبة 99٪ . افترض إننا رمزنا بالرمز (a) لهذا التقدير.

2- التقدير الأكثر احتمالاً **Most likely estimate**

وهي الفترة التي تقابل أكبر احتمال ممكن أن يأخذه هذا النشاط. وهذا هو المنوال لتوزيع الفترات التي يأخذها هذا النشاط "Mode". وليس بالضرورة المتوسط الحسابي "Mean"، افترض أننا أسمينا هذا التقدير "m".

3- التقدير المتشائم **Pessimistic estimate**

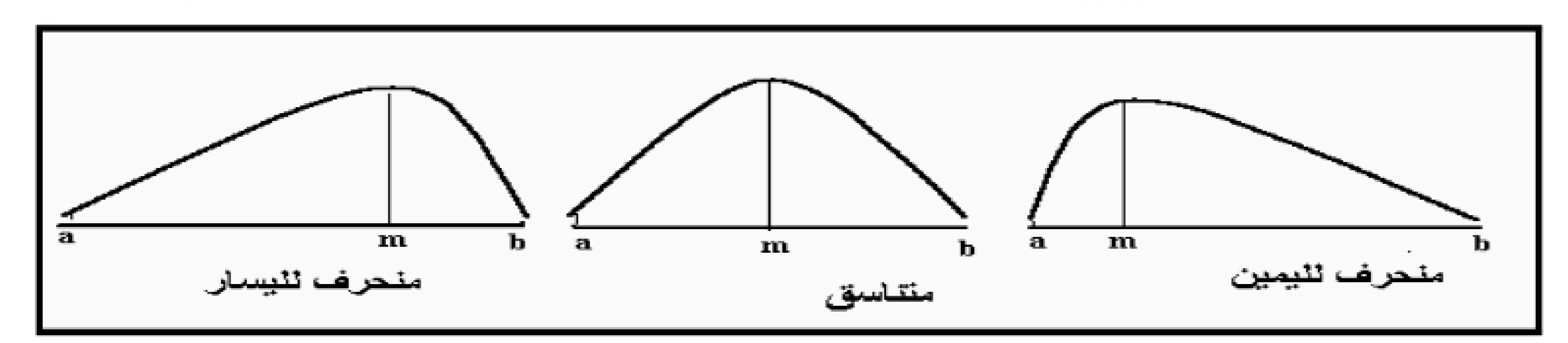
وهي أطول فترة ممكنة، بحيث إن الفترة الصحيحة التي يأخذها نشاط معين يجب أن تكون أقصر من هذا التقدير بنسبة 99% . افترض إننا رمزنا بالرمز " b " لهذا التقدير. توزيع بيتا له خاصية واحدة جعلته الأنسب والأفضل لوصف المدة الزمنية التي يتطلبها إنجاز نشاط من الأنشطة. هذه الخاصية هي أنه إذا عرفنا القيم الثلاث (أي التقدير المتفائل، التقدير الأكثر احتمالا، التقدير المتشائم) فإننا نستطيع معرفة المتوسط الحسابي أو المدة المتوقعة (t_e)، وكذلك التباين σ^2_e لهذه الفترة كما يلي:

$$t_e = \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$\sigma^2_e = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

توزيع بيتا يختلف عن التوزيع الطبيعي بأنه ليس بالضرورة متناسق حول الوسط. وذلك لأنه بإمكاننا الحصول على تقدير متفائل "a" قريب جدا من التقدير الأكثر احتمالا "m " والتقدير المتشائم"b " يكون بعيد جدا عن التقدير الأكثر احتمالا، أو العكس. وهذا يعرف في الإحصاء بالتوزيع المنحرف "Skewed distribution".

الشكل التالي يوضح الأشكال الثلاثة الممكنة لفترات الأنشطة حسب توزيع بيتا:



الآن دعنا نستخدم هذه التقديرات الثلاث (أي التقدير المتفائل، التقدير الأكثر احتمالا، التقدير المتشائم) في المشكلة السابقة، بدلا من التقدير الأول. كذلك المتوسط الحسابي أو الفترة المتوقعة t_e والتباين σ^2_e في فترة الأنشطة.

الجدول التالي يوضح المتوسط الحسابي أو الفترة المتوقعة t_e والتباين σ^2_e لفترات جميع الأنشطة:

النشاط	التقدير المتفائل	التقدير الأكثر احتمالا	التقدير المتشائم	المدة المتوقعة	التباين
A	8	12	16	12	1.78
B	13	19	31	20	9
C	8	14	20	14	4
D	4	16	28	16	16
E	19	23	57	28	40.11
F	9	15	21	15	4
G	24	36	48	36	16
H	14	22	30	22	7.11
I	13	18	23	18	2.78
J	14	24	34	24	11.11

مثلاً لحساب الوقت المتوقع والتباين للنشاط B فإن:

$$t_e = \frac{13+ 4(19) +31}{6} = 120/ 6 = 20$$

$$\sigma^2_e = \left(\frac{31-13}{6}\right)^2 = (3)^2 =9$$

لاحظ أن القيم الثلاث التي وضعناها (أي التقدير المتفائل، التقدير الأكثر احتمالاً، التقدير المتشائم) في الجدول السابق، وضُعت لكي تتفق مع القيم المتوقعة السابقة، ولذلك فإن عند التعويض في (t_e) فإن القيم جاءت كالسابق بدون تغيير.

فترة المشروع Project Duration

من أهم الأسئلة المطلوب الإجابة عليها من قبل المشرفين على المشروع، هي أسئلة تتعلق بالوقت الذي ينتهي فيه المشروع. وبالتحديد السؤال هو بنسبة كم نحن واثقون بأن المشروع سينتهي في وقت أو تاريخ معين؟

وفي المثال الحالي ممكن أن نُسأل : بنسبة كم نحن واثقون بأننا سنكمل المشروع قبل اليوم الـ 75؟

بإمكاننا إرفاق مقياس للاحتمالية هذه، مثل التباين والانحراف المعياري للأوقات التي حسبناها وذلك مثل التوقيت المبكر للأنشطة أو الأحداث. ولكن نحن الآن بصدد التركيز على معرفة احتمال وقوع الحدث الأخير (حدث 7) وهو حدث الانتهاء من المشروع.

تعريف : σ^2_E هو التباين في فترة إكمال نشاط من الأنشطة أو حدث من الأحداث .

الآن دعنا نقوم بصياغة وقت إتمام المشروع على أنه يُتوقع أن يكتمل في خلال 66 يوماً وبتباين σ^2_E . مع العلم أن تقدير 66 يوماً جاء من السابق ومن مجموعة الأنشطة التي تكّون المسار الحرج.

إذا كان فترة إتمام المشروع هي عبارة عن مجموع 3 متغيرات عشوائية، فإن توزيع هذه الفترة عبارة عن مجموع هذه الثلاث المتغيرات العشوائية المستقلة. وباستخدام نظرية النزعة المركزية "Central limit theory " التي تقول: إنه عند جمع عدة متغيرات عشوائية مستقلة، بغض النظر عن توزيعاتها الاحتمالية، فإن الناتج هو متغير عشوائي يقترب من التوزيع الطبيعي. وكلما زاد عدد هذه المتغيرات العشوائية المستقلة هذه، كلما اقترب الناتج إلى التوزيع الطبيعي. ومتوسط هذا التوزيع هو عبارة عن مجموع

متوسطات المتغيرات العشوائية (أي فترات الأنشطة)، وتباينه هو عبارة عن مجموع تباينات هذه المتغيرات العشوائية.

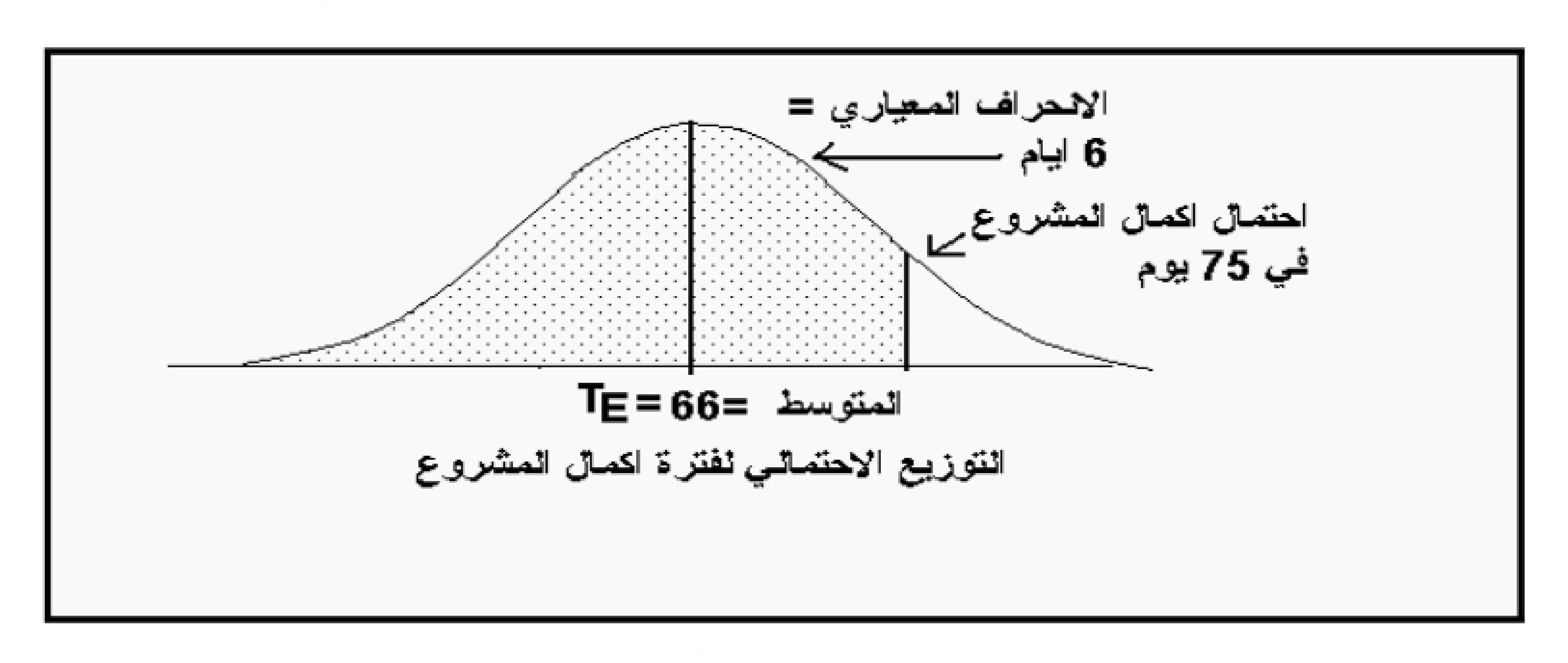
لذلك فإن :

متوسط المدة التي يأخذها المشروع = 14 +16+36 = 66 يوماً (كما في السابق)

وتباينه يكون σ^2_e = 16 + 16 + 4 = 36 يوماً

والانحراف المعياري = $\sqrt{36}$ = 6 يوم

لذلك فإنه من الممكن أن نتصور المدة التي يأخذها إكمال المشروع واحتمال اكتمال في أو قبل المدة المقررة وهي 75 يوماً كما في الشكل الاحتمالي التالي:



ولحساب احتمال إكمال المشروع في 75 يوماً فإنه يجب استخدام التوزيع الطبيعي المعياري (أي بمتوسط = صفر وانحراف معياري = 1).

والسؤال هو ما هو الاحتمال بان نأخذ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي معياري بمتوسط 66 وانحراف معياري 6، وتكون هذه العينة اقل من أو يساوي 75 ؟

وللوصول للجواب فإنه أولا يجب الحصول على قيمة z (لتحويله إلى متغير عشوائي معياري طبيعي).

$$z = \frac{\text{المدة المقررة للتسليم – المدة اللازمة لإكمال المشروع}}{\text{الانحراف المعياري}}$$

$$z = \frac{75 - 66}{6} = 1.5$$

لذلك فإن 75 يوماً تقابل انحـراف معيـاري 1.5 فـوق المتوسـط. وبـالرجوع إلى جـدول التوزيـع الطبيعـي المعيـاري التجميعـي (Cumulative Standard Normal Distribution) فإننا نجد أن القيمة 1.5 تقابل احتمال 0.9332 . أي أن احتمال أن يكتمـل المشروع قبل اليوم الـ 75 = 93%، وباعتبار أن الفترة المتوقعة لإكـمال المـشروع هـو 66 يوماً حُدد بواسطة الأنشطة التي تقع على المسار الحرج (أي G-D-C)

مع إننا افترضنا أن الفترة المتوقعة لإكمال المشروع هي 66 يوماً، إلا أن ذلك قد لا يحدد الوقت الصحيح، خاصة أن بعض المسارات الأخرى قد يأخذ وقت أطـول مـن المسار الحرج أو أن المسار الحرج قد يكتمل في وقت اقل.

احسب احتمال أن يأخذ المسار A-E-I وقتا أكثر من 43 يوماً.

أوقات وقوع الحدث Event Occurrence Times

فترة إكمال المشروع هي تعادل الوقت المبكرTE لوقوع الحدث الأخير، وخاصـة لان T_E للحدث الأول بدأ من الصفر. وبإمكاننا قياس التباينσ^2_E المرافق للوقت المبكر T_E لكل حدث . وسنستخدم تباين فترة النشاط $\sigma^2 e$ للحصول على تباين الحدث $\sigma 2_E$.

فلكل حدث معين، فـإن التبـاين في وقـوع الحـدث (σ^2_E) = التبـاين (σ^2_E) للحـدث السابق له مباشرة + التباين ($\sigma^2 e$) لفترة النشاط الذي يربط بين هذين الحدثين.

فمثلاً :

التباين للحدث الأول σ^2_E = 0، حسب التعريف

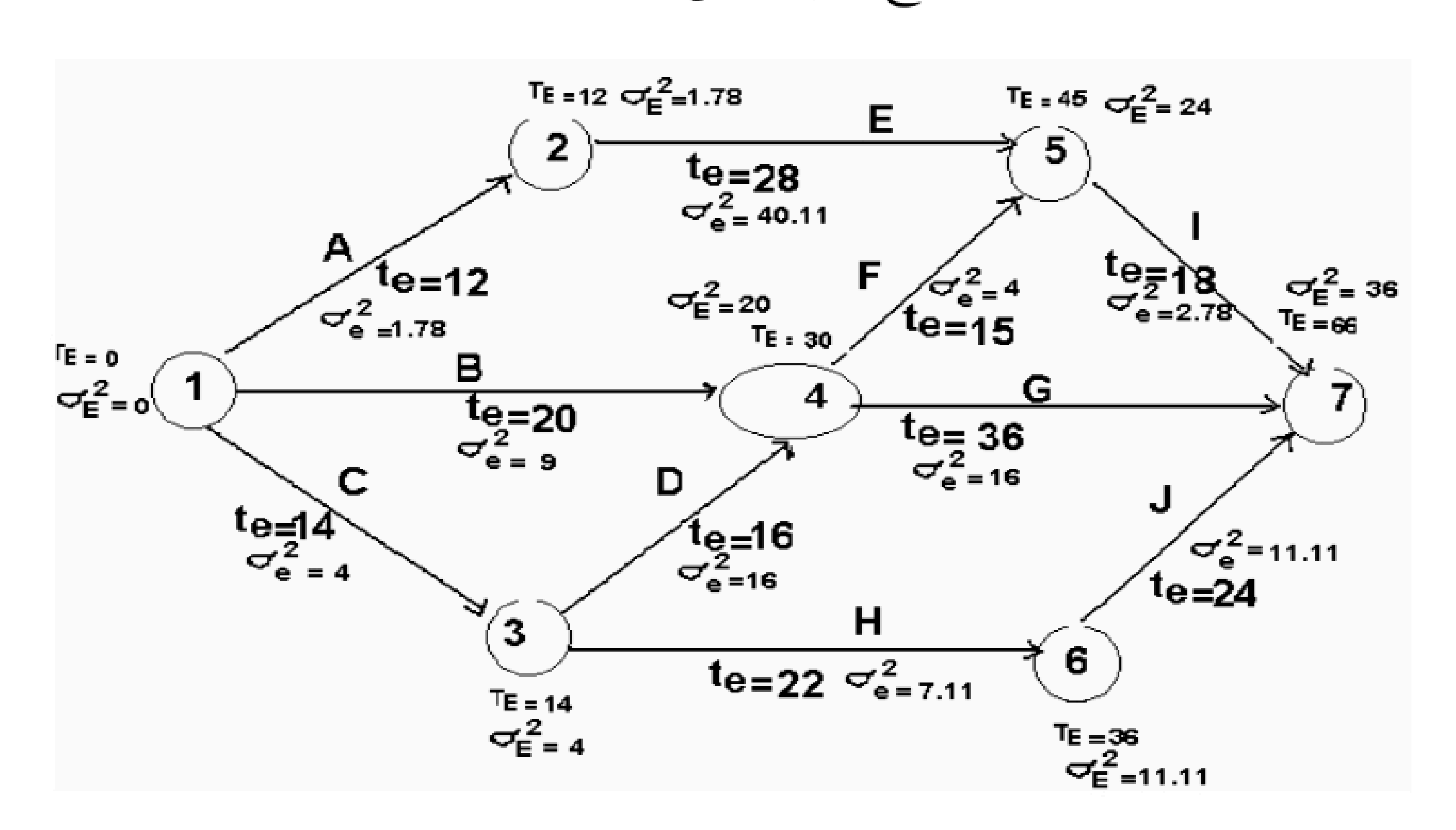
التباين للحدث الثاني $\sigma^2{}_E$ =تباين الحدث الأول + تبـاين النـشاط الـذي يـربط الحدث 2 بالحدث 1 (أي تباين النشاط A) =0 + 1.78 = 1.78

كذلك الحدث 3 = 0 + 4 = 4 أيام

ولكن الحدث 4، أصعب قليلا، حيث يوجد نشاطين سـابقين للحـدث 4 وهـم D, B ولمعرفة التباين لهذا الحدث فإنه يجب معرفة أي مـن النـشاطين هـو الـذي حـدد وقت مبكر T_E = 30 يوماً للحدث 4 ؟

إنه النشاط D وذلك لان T_E = 30 هي عبارة عن جمع 14 + 16 = 30 يوماً.

شبكة PERT التالية توضح التباين لكل الأحداث :



وهو عن طريق الحدث 3 . لذلك فعند حساب التباين لهذا الحدث فإننـا نجمـع تباين الحدث 3 + تباين النشاط = 4 + 16 = 20 يوماً.

ويفسر على أن احتمال وقوع الحدث 4 يكـون يتبـع التوزيـع الطبيعـي بمتوسـط حسابي (T_E) يساوي 30 يوماً، وتباين 20 يوماً.

ومن الممكن حساب احتمال أن يقع الحدث 4 قبل اليوم 35 . ولحساب ذلك فإننا أولا نستخرج قيمة z.

$$z = \frac{35 - 30}{\sqrt{20}} = 1.12$$

وبالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي التجميعي، بإمكاننا إيجاد احتمال أن:

$z \leq 1.12$

وهكذا ممكن أن نكمل حساب التباين لجميع الأحداث الباقية، وملاحظة أن التباين للحدث الأخير (7) يجب أن يساوي التباين الخاص بالفترة المتوقعة لإنهاء المشروع بأكمله.

أوقات إتمام النشاط Activity-Completion Times

بإمكاننا أيضا حساب التباين لكل نشاط على حدة، والقاعدة هي كالتالي:

تباين (σ^2_E) نشاط معين = التباين σ^2_E للحدث السابق + التباين σ^2_e لفترة النشاط نفسه.

الجدول التالي يوضح الوقت المتوقع (T_E) والتباين لإكمال الأنشطة:

التباين Variance σ^2_E	الوقت المبكر المتوقع Earliest Expected Completion time (T_E)	النشاط
1.78	12	A
9	20	B
4	14	C
20	30	D
41.89	40	E
24	45	F
36	66	G
11.11	36	H
26.78	63	I
22.22	60	J

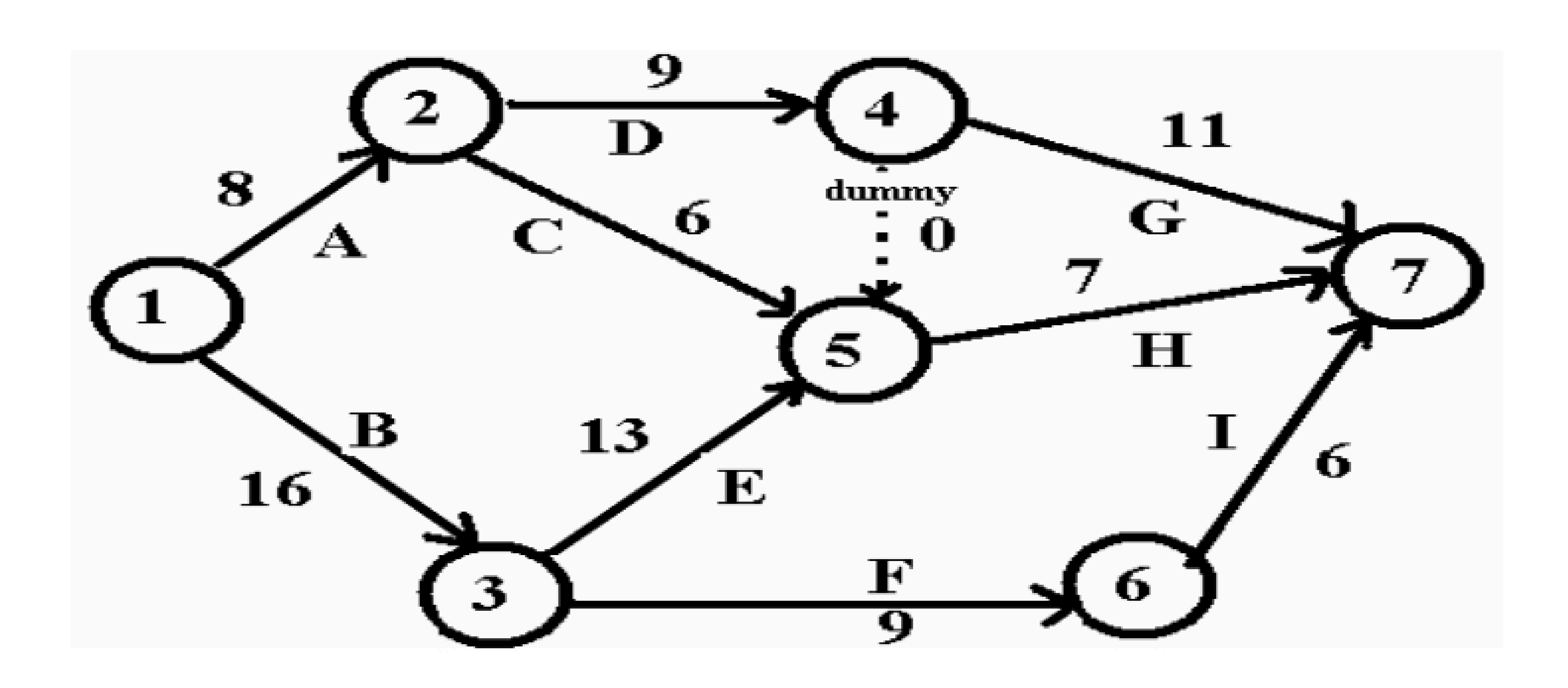
مسائل محلولة على أسلوب تقييم البرامج ومراجعتها وطريقة المسار الحرج CPM

1- (تخطيط منشآت سياحية) شركة المنتجعات الوطنية قامت بشراء أرض مساحتها 16 كم^2 بمدينة الرياض لإقامة استراحات طبيعية وأشجار وملاعب أطفال ومسطحات خضراء ومائية وكانت الأنشطة اللازمة لتخطيط الأرض وتسويتها وتقسيمها وزراعتها وتشجيرها وبناءها يتطلب إنجاز الأنشطة التالية:

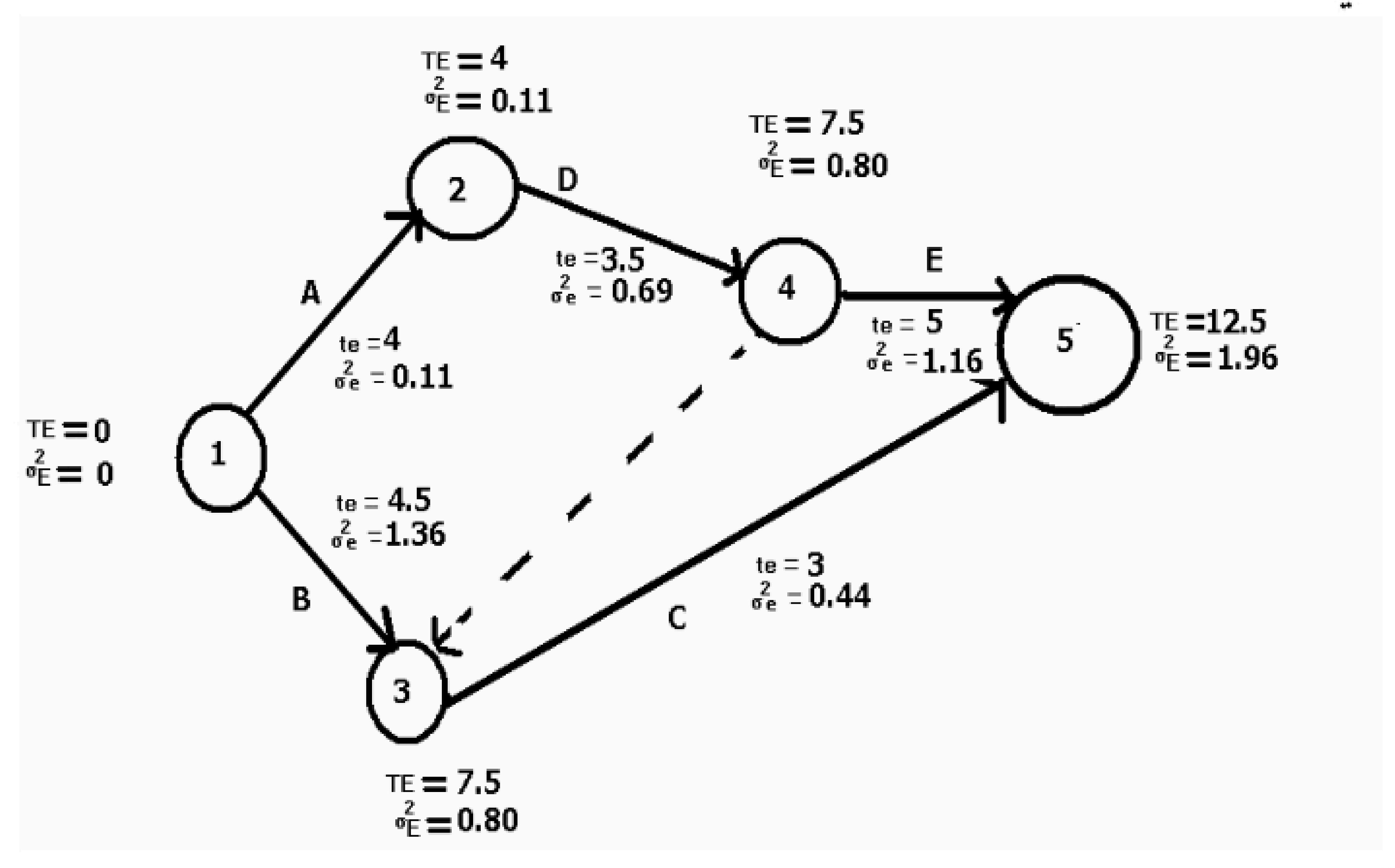
النشاط (Activity)	النشاط السابق (predecessor activities)
A	لا يوجد
B	لا يوجد
C	A
D	A
E	A,B
F	B,A
G	C,E
H	D,G
I	E
K	F

المطلوب رسم شجرة بيرت فقط.

2- (تخطيط أحداث المشروع) إذا كانت الأوقات المتوقع (t_e) هي كما هو على شبكة بيرت التالية. المطلوب استخراج الوقت المبكر (T_E) والمتأخر (T_L) والفوائض (Slacks) لأحداث المشروع واستخراج المسار الحرج (CPM):



3- إذا كانت الأوقات المتوقعة والتباين للأنشطة والإحداث لأحد المشاريع هي كالتالي:



المطلوب:

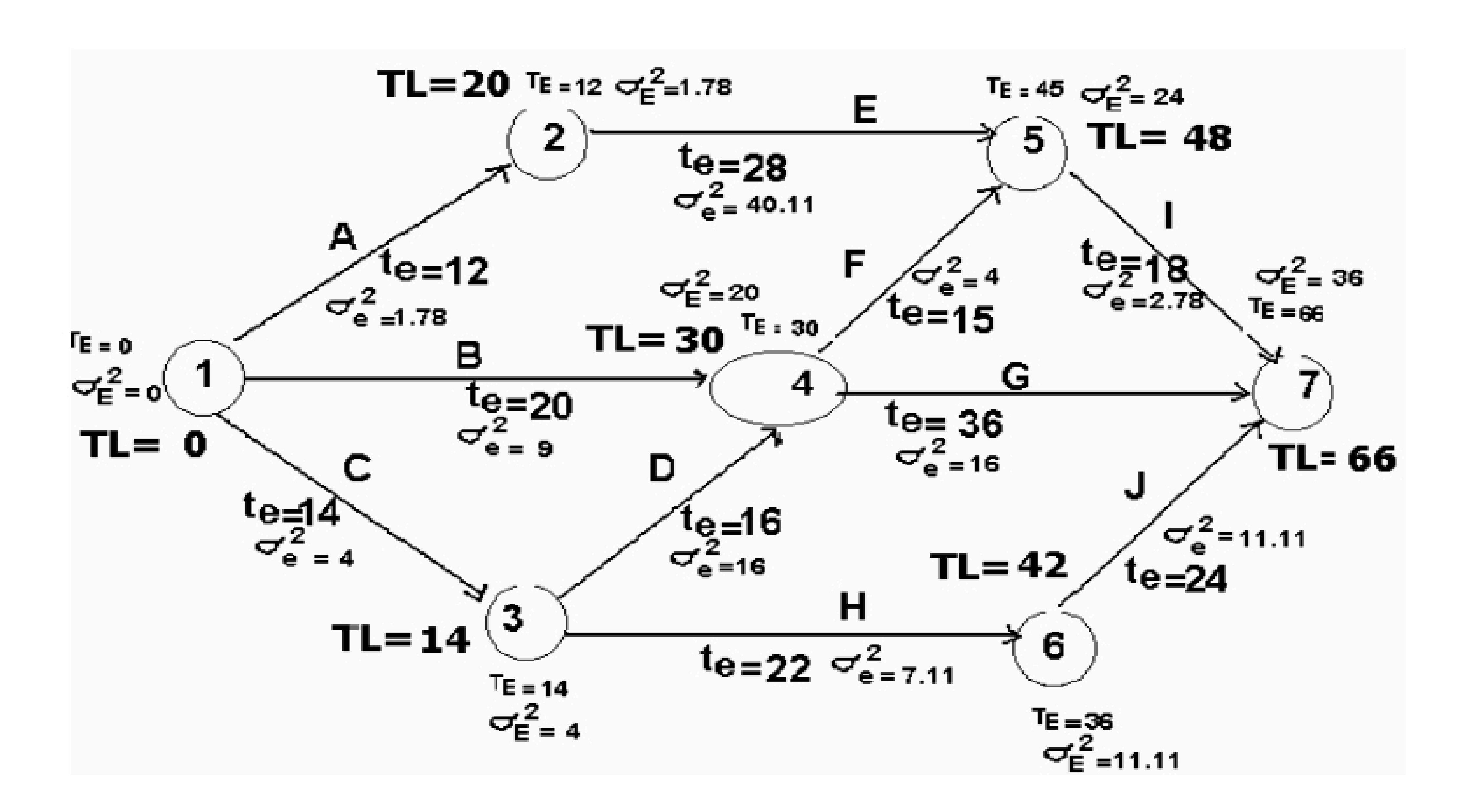
أ) حساب احتمال أن ينتهي المشروع في خلال 14 يوماً (14 يوم أو اقل)؟

ب) احتمال أن ينتهي المشروع في خلال 10 أيام (10 أيام أو اقل) ؟

جـ) احتمال أن ينتهي النشاط D في مدة تتراوح بين 5 إلى 10 أيام؟

د) احتمال أن ينتهي النشاط D في خلال 10 أيام؟

4- إذا كانت شبكة – خارطة- PERT شاملة الأوقات المتوقعة والتباين للأنشطة هي كالتالي:



المطلوب :

أ) حساب احتمال أن ينتهي المشروع في فترة لا تقل عن 46 يوم؟

ب) حساب احتمال أن ينتهي المشروع في فترة لا تزيد عن 86 يوم؟

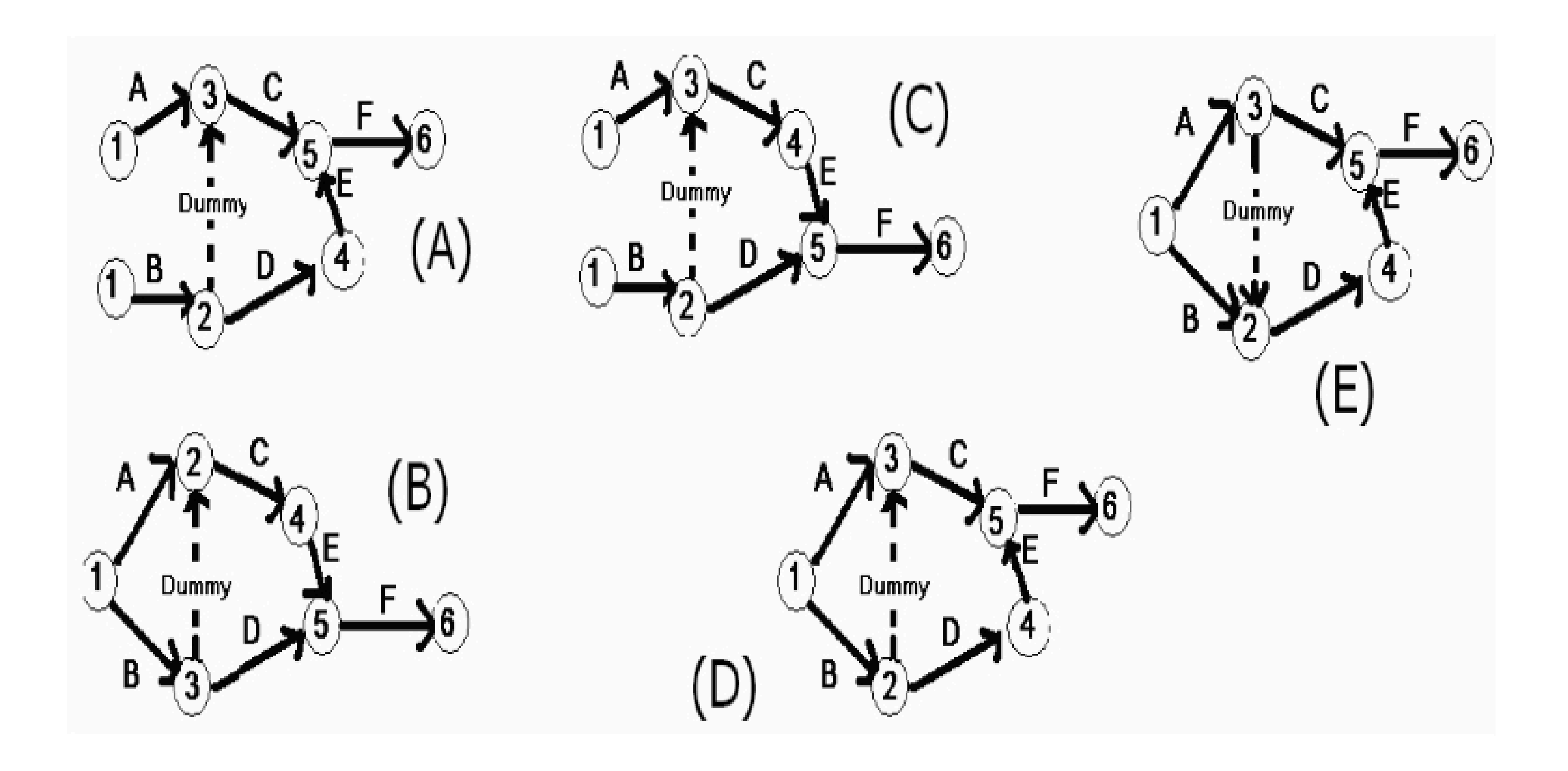
جـ) حساب احتمال أن يبدأ النشاط G في فترة لا تزيد عن 40 يوماً؟

د) حساب احتمال أن يبدأ النشاط G في فترة تتراوح بين 30 إلى 50 يوماً؟

5- إذا كانت الأنشطة والأنشطة السابقة لمشروع تسويق منتج هي كالتالي

النشاط (Activities)	الأنشطة السابقة (Predecessors)
A : تدريب العمال	لا يوجد
B : شراء الآلات	لا يوجد
C: إنتاج المادة (1)	A , B
D: إنتاج المادة (2)	B
E: اختبار المادة (2)	D
F: مزج المادتين (1 ، 2)	C, E

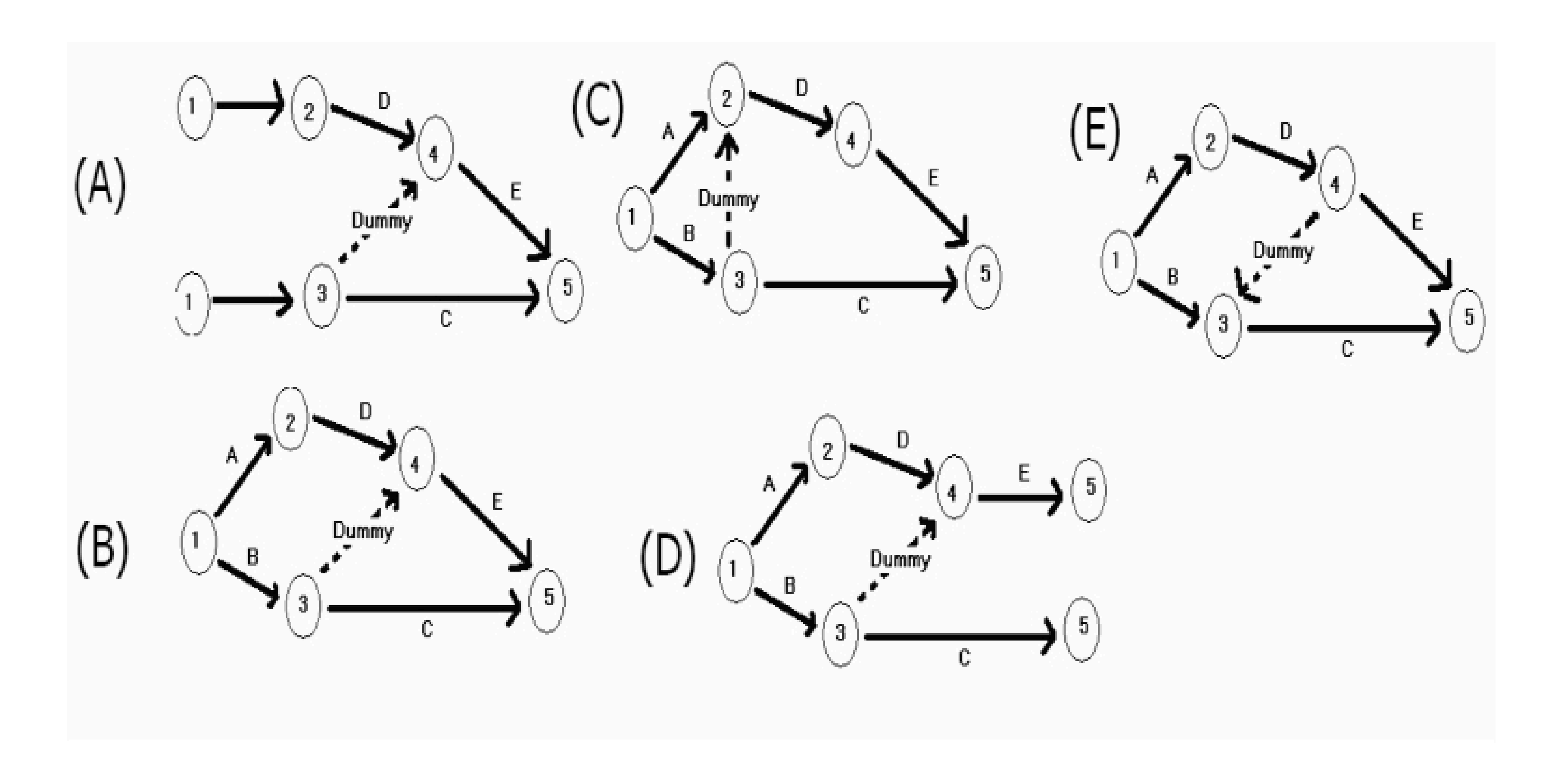
والمطلوب اختيار الرسم الصحيح لشبكة PERT من بين الرسوم التالية:



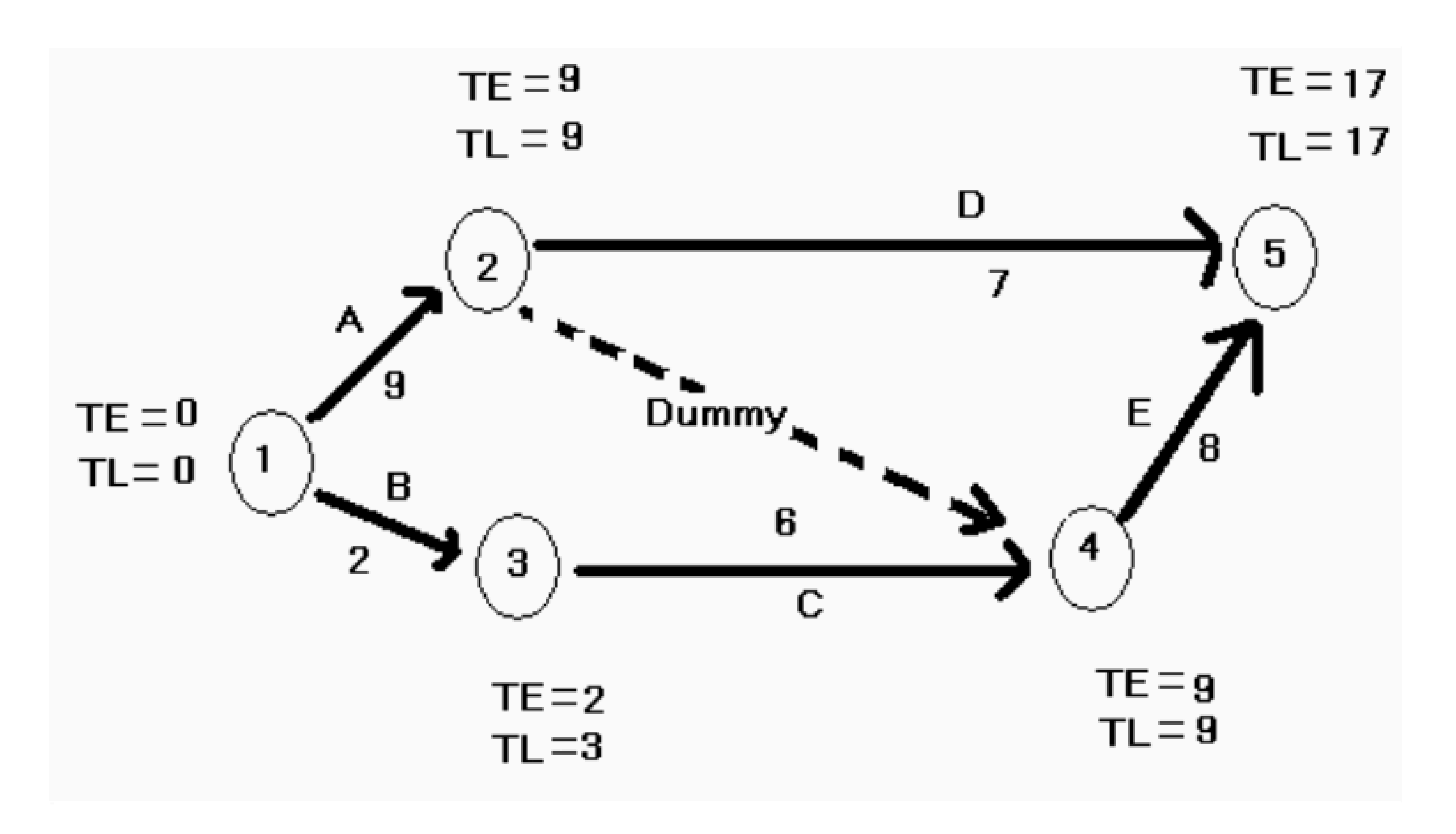
6- إذا كانت الأنشطة والأنشطة السابقة لمشروع الجزيرة هي كالتالي:

النشاط (Activities)	الأنشطة السابقة Predecessors
A : تدريب العمال	لا يوجد
B : شراء الآلات	لا يوجد
C: إنتاج المادة (1)	B
D: إنتاج المادة (2)	A
E: اختبار المادة (2)	D,B

والمطلوب اختيار الرسم الصحيح لشبكة PERT من بين الرسوم التالية:



7- إذا كانت شبكة بيرت PERT لمشروع العقار هي كالتالي:



المطلوب اختيار الأنشطة التي تقع على المسار الحرج CPM

a) A, ,Dummy,D

b) A,Dummy,E

c) B,C,D

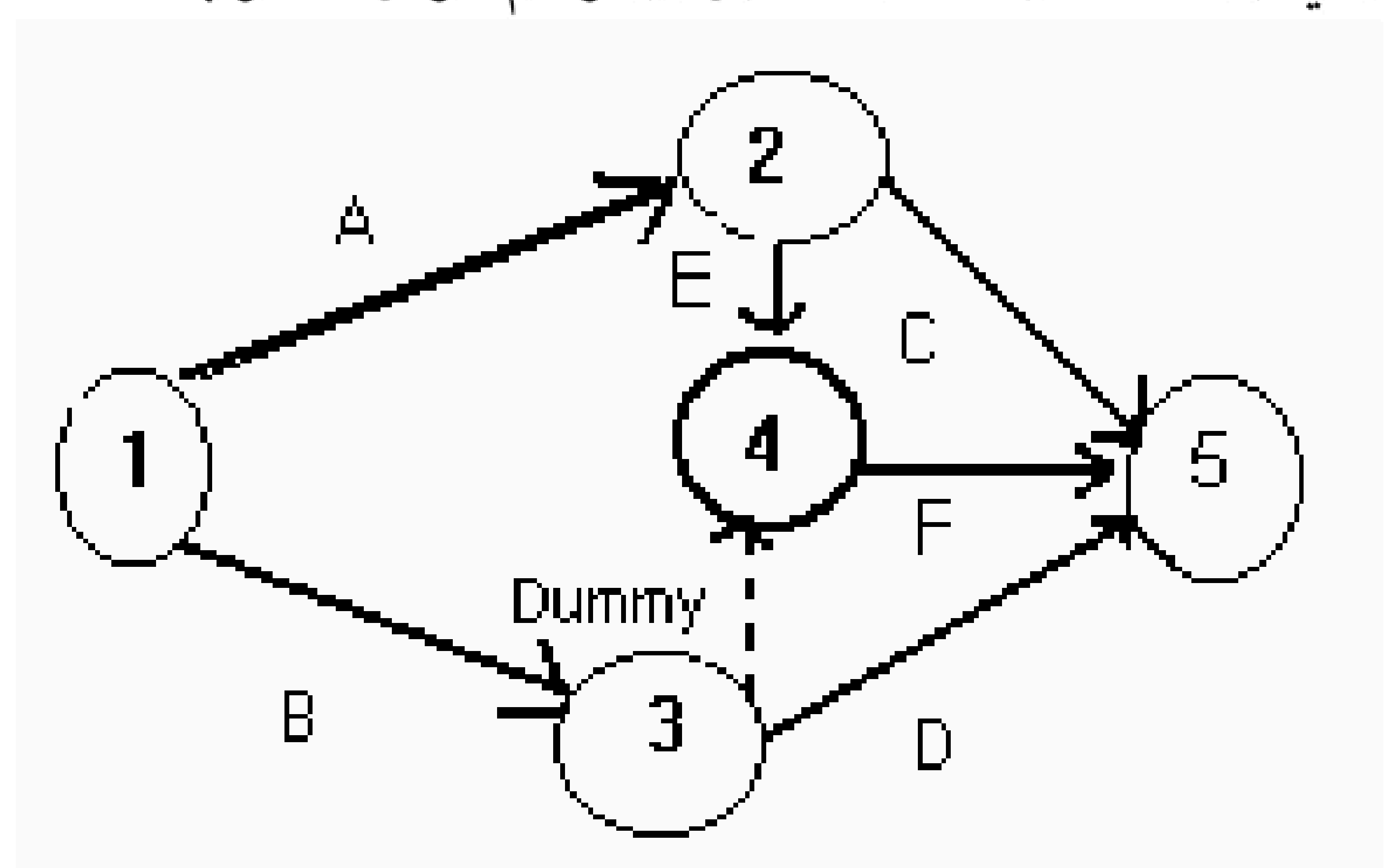
d) B,C,E

e) A,Dummy, C,B

8- إدارة مـشاريع. إذا كانـت الأنـشطة والفـترات المتوقعـة بالأسـابيع لمـشروع الجزيرة هي كالتالي:

النشاط	الفترات المتوقعة			te			
	المتفائل (a)	الأكثر احتمالا (m)	المتشائم (b)				
A	1	3	3.5	2.75			
B	0.5	2	3.5	2			
C	3	4	8	4.5			
D	3	5	10	5.5			
E	4	5	9	5.5			
F	3	.53	4	3.5			

المطلوب الآتي: بالاستعانة بالجدول السابق وبالرسم المرفق المطلوب:



أ) حساب الوقت المبكر والمتأخر للأحداث وللأنشطة وتحديد المسار الحرج؟

ب) حساب احتمال أن ينتهي المشروع في فترة تتراوح بين 10 إلى 15 أسبوعاً؟

جـ) احتمال أن ينتهي المشروع في فترة لا تقل عن 14 أسبوع (أي 14 أسبوعا أو أكثر)؟

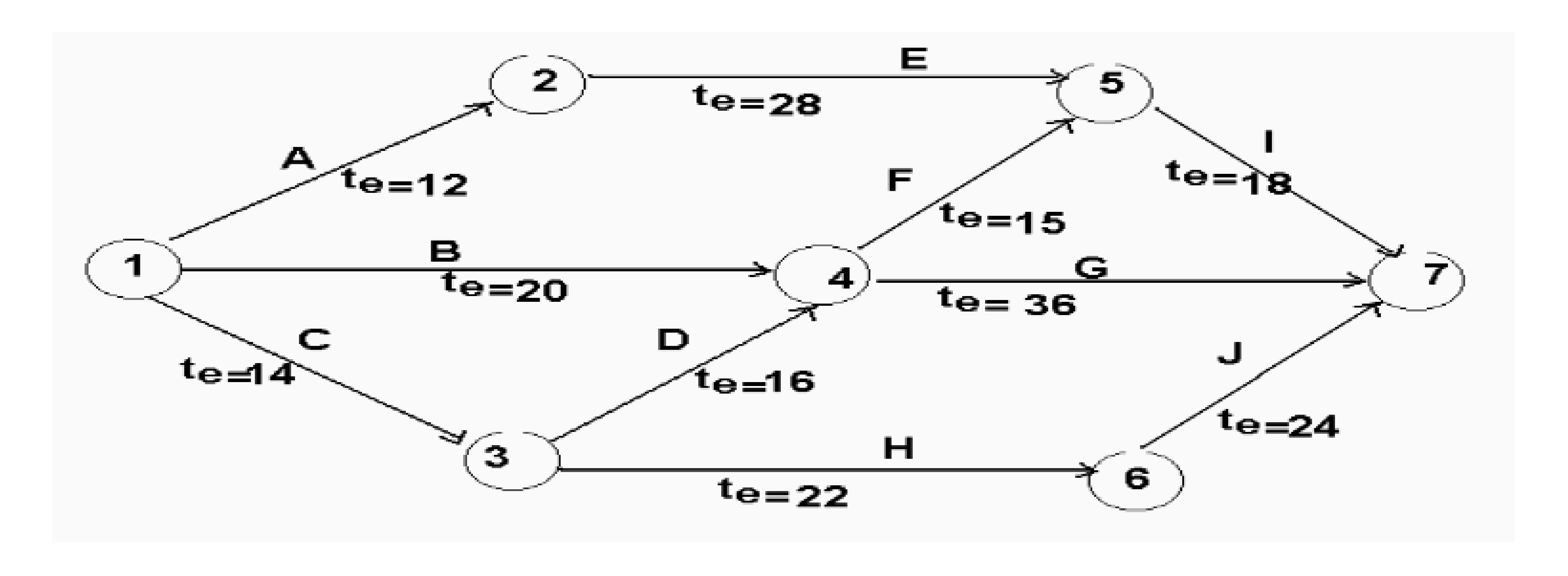
د) احتمال أن يبدأ النشاط d في مدة لا تزيد عن 3 أسابيع؟

حل مشكلة Pert وCPM باستخدام الحاسب

حل مشاكل Pert وCPM باستخدام إكسل (Excel)

هنا نسترجع المشكلة الخاصة بشركة سدير السابقة وملخص المشكلة في الجدول وخريطة بيرت (PERT) التاليتين والتي تم حلها باستخدام شبكة Pert بالتفصيل:

النشاط	الأنشطة السابقة	المدة المتوقعة Expected duration (t_e)
A	لا يوجد	12
B	لا يوجد	20
C	لا يوجد	14
D	C	16
E	A	28
F	D, B	15
G	D, B	36
H	C	22
I	E, F	18
J	H	24

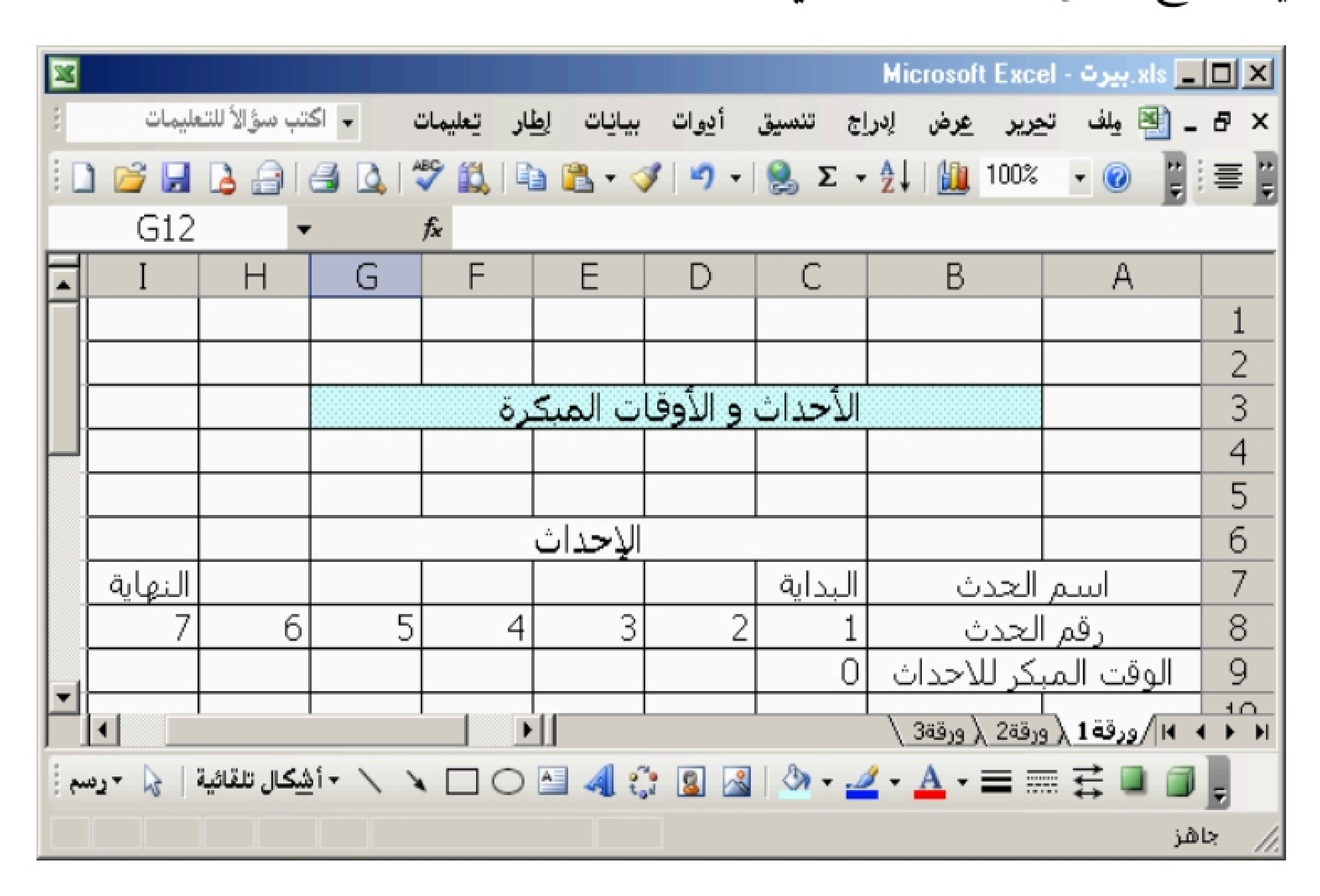


والمطلوب حل المشكلة وتحديد المسار الحرج والوقت المتوقع للانتهاء باستخدام برنامج إكسل (EXCEL).

لحل المشكلة يتعين علينا إتباع الخطوات التالية لتسهيل عملية الحل:

الانتقال إلى برنامج إكسل (EXCEL) ووضع جدول بيرت (PERT) بالشكل التالي:

- اختيار صف وتسميته الأحداث ووضع أرقام هذه الأحداث في هذا الصف.
- كل خلية من الخلايا تمثل الوقت المبكر لبداية الحدث.
- نبدأ بوضع القيمة صفر (0) في الخلية الأولى والتي تمثل الحدث رقم 1.
- الخلايا D9:G9 ستكون الخلايا التي يخرج فيها قيم ونتائج الوقت المبكر لكل حدث. وهذا سيكون هو المطلوب من البرامج التوصل إليه وسيكون شكل المشكلة في برنامج إكسل (EXCEL) كالتالي:



• بعد ذلك ندخل شبكة بيرت (PERT) والعلاقة بين الأحداث والأنشطة في جدول إكسل (EXCEL) بوضع الأنشطة على العمود B والأحداث على الصف 15 على سبيل المثال.

• حيث إن الأنشطة تمثل في شبكة بيرت (PERT) بمنحنى أو خط يصل بين الحدث السابق والحدث اللاحق فإنه هنا ستوضع هذه العلاقة في الصفوف بحيث يكون لكل نشاط صف واحد.

• كل نشاط سيوضع إمامه الرقم (1-) مقابل الحدث الذي يبدأ به ويوضع أمامه (1) أمام الحدث الذي ينتهي فيه وما عدى ذلك نضع القيمة (0) كما في الشكل التالي:

Microsoft Excel - بيرت.xls

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
4										
5										
6			الإحداث							
7	اسم الحدث		البداية						النهاية	
8	رقم الحدث		1	2	3	4	5	6	7	
9	المبكر للاحداث		0							
10										
11										
12	لأحداث والانشطة و الاوقات المبكرة									
13			الإحداث							
14			البداية						النهاية	
15			1	2	3	4	5	6	7	
16		A	1-	1	0	0	0	0	0	
17	الانشطة	B	1-	0	0	1	0	0	0	
18		C	1-	0	1	0	0	0	0	
19		D	0	0	1-	1	0	0	0	
20		E	0	1-	0	0	1	0	0	
21		F	0	0	0	1-	1	0	0	
22		G	0	0	0	1-	0	0	1	
23		H	0	0	1-	0	0	1	0	
24		I	0	0	0	0	1-	0	1	
25		J	0	0	0	0	0	1-	1	

• بعد ذلك ندخل الوقت أو المدة المتوقعة (te) لكل نشاط أمامه في العمود على سبيل المثال في العمود L . وتكون في الخلايا (L16:L25) .

- وفي العمود J على سبيل المثال يمكن أن نضع الخلايا الخاصة بالوقت المتأخر المسموح به لكل نشاط أي في الخلايا (J16:J25). ويكون حسب المعادلة التالية: sumproduct(c9:$I$9,c16:I16) لحساب الوقت المتأخر المسموح به لكل نشاط. مع ملاحظة أن رمز الدولار ($) وضع بين الإشارات إلى الصف رقم 9 لتثبيت هذه الخلايا وعدم تحرك الإشارة إليها عند التعبئة. وهذه التعبئة سنستخدمها في نسخ الدالة إلى الخلايا الأخرى. حيث نبدأ بالخلية رقم J16 ثم نسحب الخلية من الزاوية السفلى اليسرى مع استمرار الضغط على الماوس حتى نصل إلى آخر خلية.
- في العمود M نضع الفوائض وهي عبارة عن ناتج طرح قيم J16-L16 وهكذا بالنسبة للعناصر الأخر في نفس العمود.
- وفي العمود رقم K نقوم بإدخال علامات الأكبر من أو يساوي (>=) أي أن الوقت المتأخر المسموح به دائماً أكبر من أو يساوي المدة المتوقعة لكل نشاط. ويكون الحل عند هذه الخطوة كالتالي:

Microsoft Excel - بيرت.xls

J16 =SUMPRODUCT($C$9:$I$9,C16:I16)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
5												
6			الإحداث									
7	اسم الحدث		البداية						النهاية			
8	رقم الحدث		1	2	3	4	5	6	7			
9	ب المبكر للاحداث		0									
10												
11												
12	لأحداث والانشطة و الاوقات المبكرة											
13			الإحداث									
14			البداية						النهاية	الوقت المتأخر		المدة
15			1	2	3	4	5	6	7	المسموح به		المتوقعة
16		A	1-	1	0	0	0	0	0	0	=<	12
17	الأنشطة	B	1-	0	0	1	0	0	0	0	=<	20
18		C	1-	0	1	0	0	0	0	0	=<	14
19		D	0	0	1-	1	0	0	0	0	=<	16
20		E	0	1-	0	0	1	0	0	0	=<	28
21		F	0	0	0	1-	1	0	0	0	=<	15
22		G	0	0	0	1-	0	0	1	0	=<	36
23		H	0	0	1-	0	0	1	0	0	=<	22
24		I	0	0	0	0	1-	0	1	0	=<	18
25		J	0	0	0	0	0	1-	1	0	=<	24
26												

ورقة1 / ورقة2 / ورقة3

جاهز

بعد ذلك نحدد الخلية الخاصة بالمدة المتوقع للمشروع ككل وهي عبارة عن الوقت المبكر والمتأخر للحدث الأخير ونضعها في الخلية مثلاً H11 وهي نفسها القيمة التي تكون في الخلية I9. ولذلك نضع في الخلية H11 القيمة (I9).

الانتقال إلى Solver في قائمة أدوات Tools ثم ادخل المعطيات التالية:

في خانة الخلية الهدف set target cell ضع H11 .

في خانة equal to نضع min أي اقل مدة متوقعة.

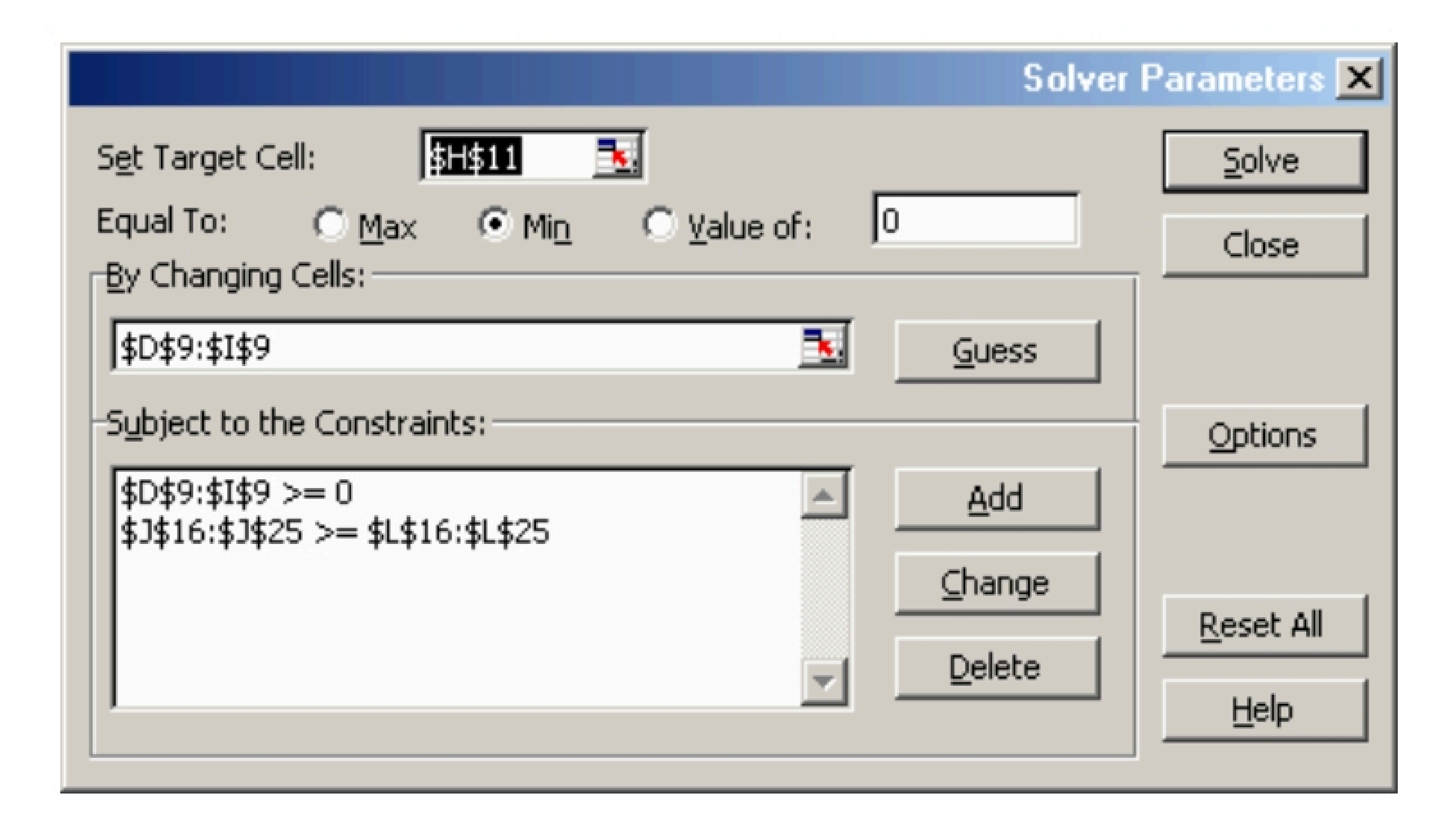
في خانة الخلايا التي يتم تغييرها by changing نضع D9:I9 .

وفي خانة القيود subject to نضع القيد D9:I9>=0 وكذلك القيد.

. J16:J25>=L16:L25

وفي خانة الخيارات Options نضع افتراض نموذج خطي Assume Linear Model

ويكون شكل نافذة Solver كالآتي:



ثم بالنقر على حل Solve ثم موافق Ok نصل إلى الحل وفيهـا يظهـر أن الأوقـات المتأخرة المسموح بها لكل حدث هي كما يلي:

TL(1)=0,TL(2)=20,TL(3)=14,TL(4)=30,TL(5)=48,TL(6)=42,TL(7)=66

Microsoft Excel - بيرت.xls

L16 | 12

	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
7	البداية						النهاية				
8	1	2	3	4	5	6	7				
9	0	20	14	30	48	42	66				
10											
11	الوقت المتوقع لانهاء المشروع =					66					
12	قات المبكرة										
13	الإحداث										
14	البداية						النهاية	الوقت المتأخر		المدة	الفائض
15	1	2	3	4	5	6	7	المسموح به		المتوقعة	
16	1-	1	0	0	0	0	0	20	=<	12	8
17	1-	0	0	1	0	0	0	30	=<	20	10
18	1-	0	1	0	0	0	0	14	=<	14	0
19	0	0	1-	1	0	0	0	16	=<	16	0
20	0	1-	0	0	1	0	0	28	=<	28	0
21	0	0	0	1-	1	0	0	18	=<	15	3
22	0	0	0	1-	0	0	1	36	=<	36	0
23	0	0	1-	0	0	1	0	28	=<	22	6
24	0	0	0	0	1-	0	1	18	=<	18	0
25	0	0	0	0	0	1-	1	24	=<	24	0

حل مشاكل Pert وCPM باستخدام برنامج QSB

يمكن حل مشكلة شركة سدير السابقة باستخدام برنامج QSB كما يلي:

أولاً: من قائمة إبدأ (Start) في النوافذ نذهب إلى البرامج (programs) ثم اختيار برنامج SQB وبعد ذلك تخـرج لنـا قائمـة طويلـة بتطبيقـات البرنـامج ونختـار منهـا (Pert/cpm) ثم تخرج لنا نافذة البرنامج كما في الشكل التالي:



بعد ذلك يتم النقر على الأيقونة "مشكلة جديدة" ويـتم كتابـة معلومـات المشكلة كما في الشكل التالي:

Problem Specification

Problem Title: مشكلة شركة صدير

Number of Activities: 10

Time Unit: الايام

Problem Type
- Deterministic CPM
- Probabilistic PERT

Select CPM Data Field
- Normal Time
- Crash Time
- Normal Cost
- Crash Cost
- Actual Cost
- Percent Complete

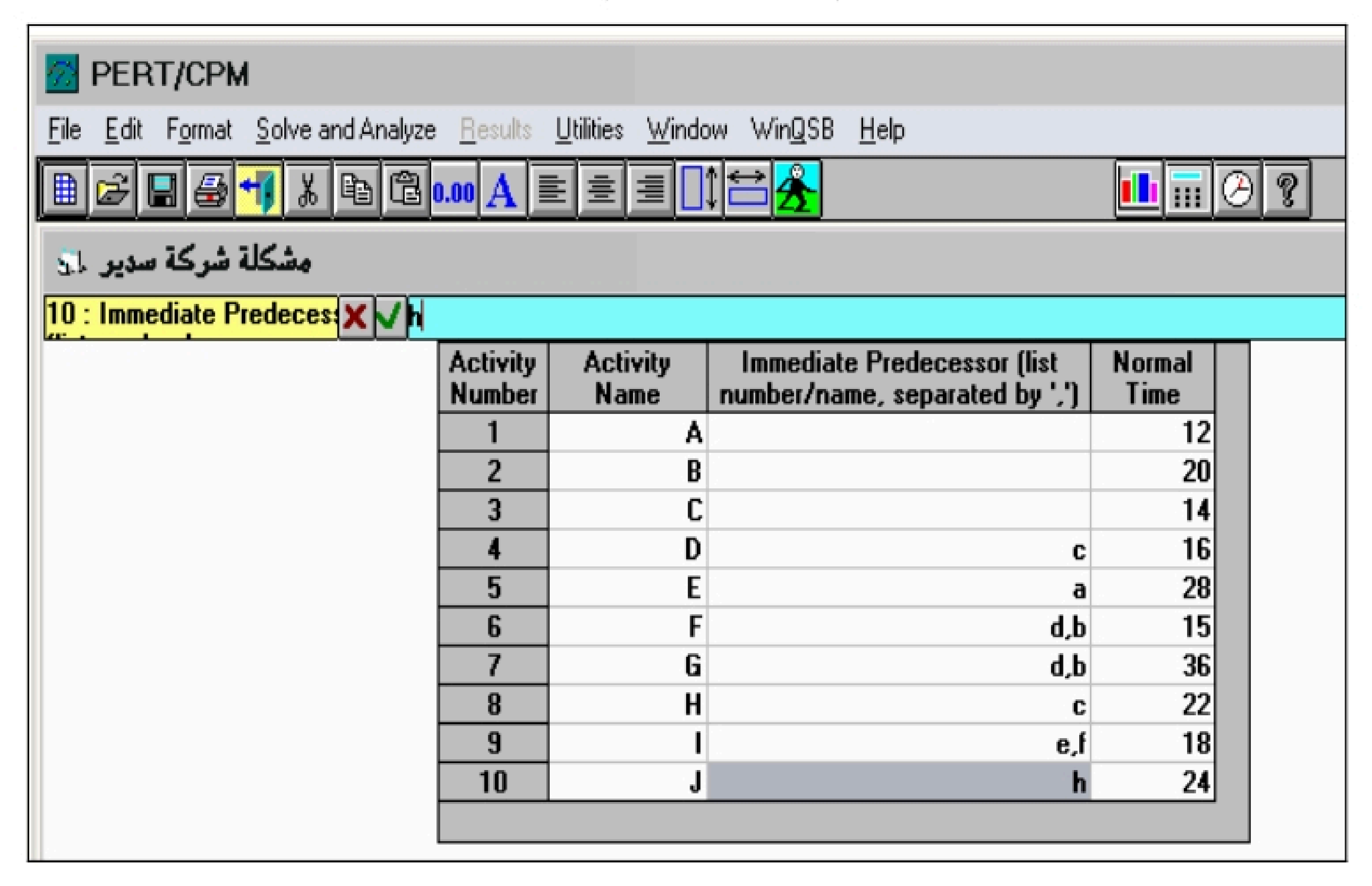
Data Entry Format
- Spreadsheet
- Graphic Model

Activity Time Distribution:

Choose Activity Time Distribution

OK | Cancel | Help

مـع العلـم بـأن Number of activities هـي عـدد الأنـشطة ونوعيـة المـشكلة (Problem type) هي محددة (Deterministic) وحقل البيانات (Data Field) هـو الوقـت الطبيعـي (Normal Time) بيـنما وضـعنا الهيئـة التـي نـدخل بهـا البيانـات (Data Entry Format) على شكل جدول (Spreadsheet). وبعد ذلـك تخـرج لنـا نافـذة إدخال البيانات كما هي في الشكل التالي:



PERT/CPM

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

مشكلة شركة سدير

10 : Immediate Predecessor h

Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Normal Time
1	A		12
2	B		20
3	C		14
4	D	c	16
5	E	a	28
6	F	d,b	15
7	G	d,b	36
8	H	c	22
9	I	e,f	18
10	J	h	24

مع العلم أيضا بـأن رقـم النـشاط هـو (Activity Number) واسـم النـشاط هـو (Activity name) والأنشطة السابقة مباشرة هي (Immediate Predecessor) ويتم وضع فواصل بينهما إذا كانت الأنشطة السابقة أكثر من واحـد. وبعـد الانتهـاء مـن إدخـال البيانات بالكامل نقوم بحل المشكلة من قائمة (Solve and Analyze).

وبعد ذلك تخرج لنا نافذة الحل في الصفحة التالية:

PERT/CPM

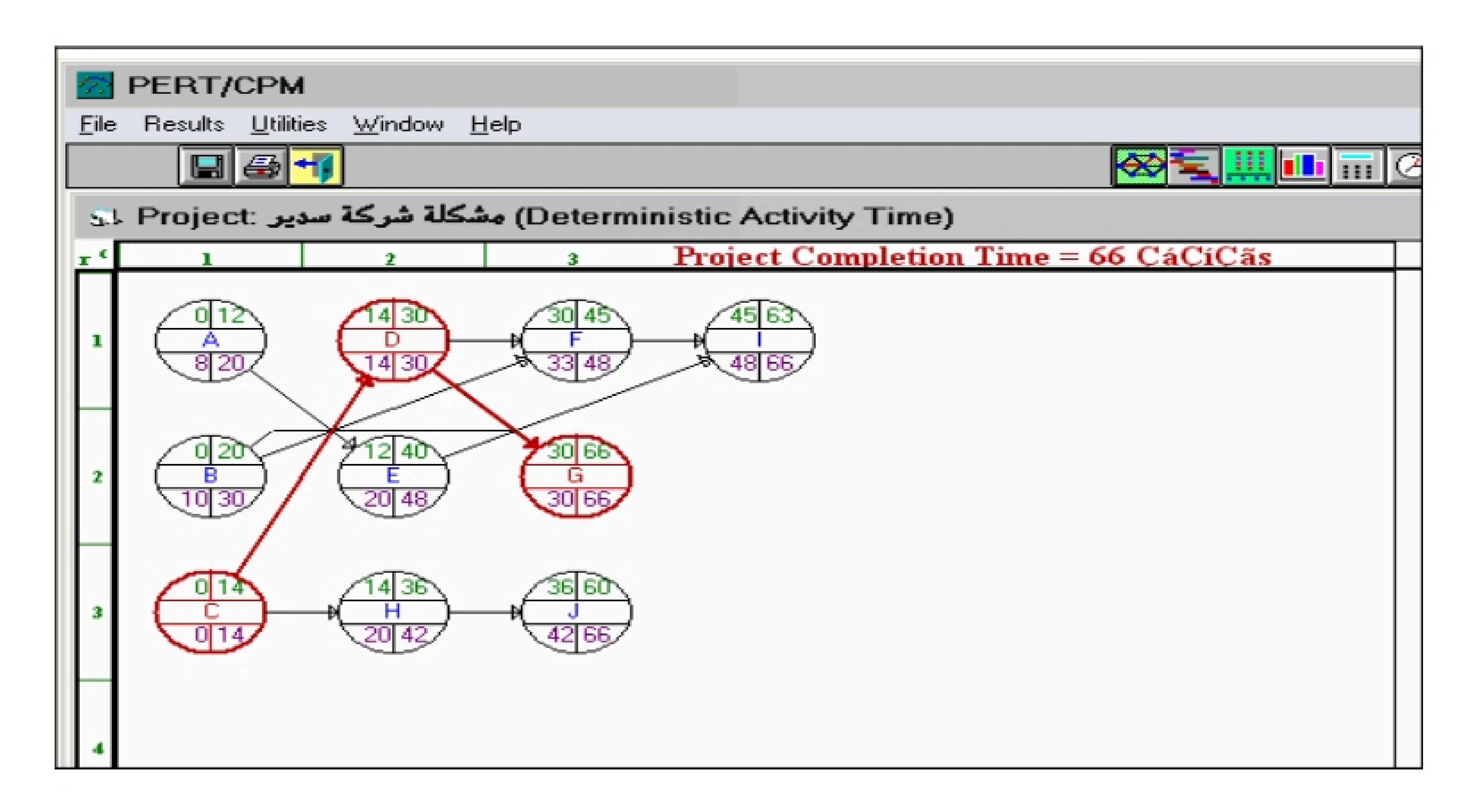
File Format Results Utilities Window Help

Activity Analysis for مشكلة شركة سدير

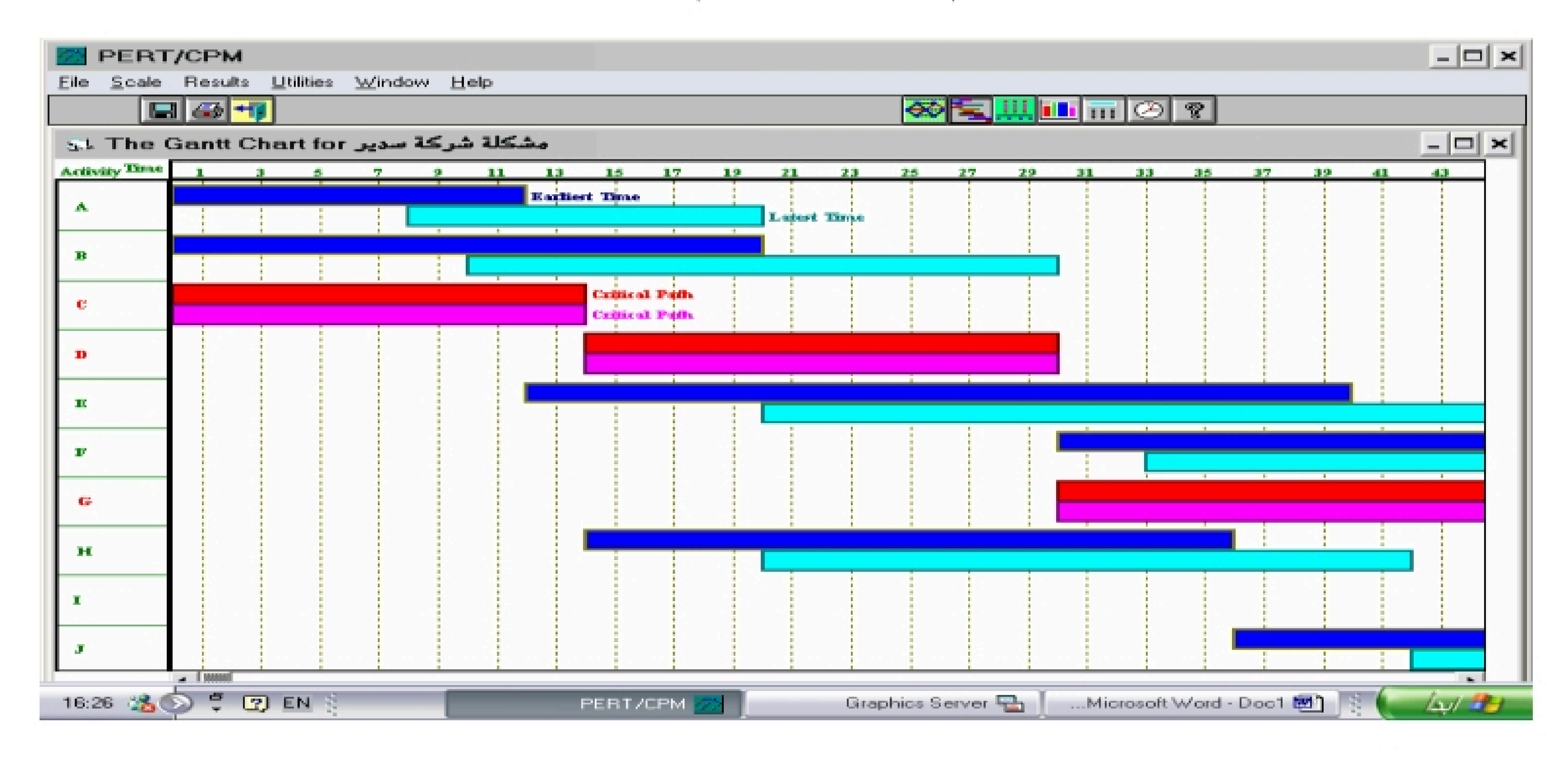
12-09-2002 16:24:01	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)
1	A	no	12	0	12	8	20	8
2	B	no	20	0	20	10	30	10
3	C	Yes	14	0	14	0	14	0
4	D	Yes	16	14	30	14	30	0
5	E	no	28	12	40	20	48	8
6	F	no	15	30	45	33	48	3
7	G	Yes	36	30	66	30	66	0
8	H	no	22	14	36	20	42	6
9	I	no	18	45	63	48	66	3
10	J	no	24	36	60	42	66	6
	Project	Completion	Time	=	66	الأيام		
	Number of	Critical	Path(s)	=	1			

ونلاحظ من الحل السابق أن الأنشطة التي تقع على المسار الحرج (CPM) هي الأنشطة (c,d,g) كما يظهر من العامود (On Critical Path) وأن الأوقات المبكرة للأنشطة (TE) هي القيم الموجودة في العامود (Earliest Start) وكذلك الوقت المتوقع لانتهاء المشروع (Project Completion Time) وهي نفسها نفس النتائج التي تحصلنا عليها من قبل باستخدام طريقة بيرت (PERT) .

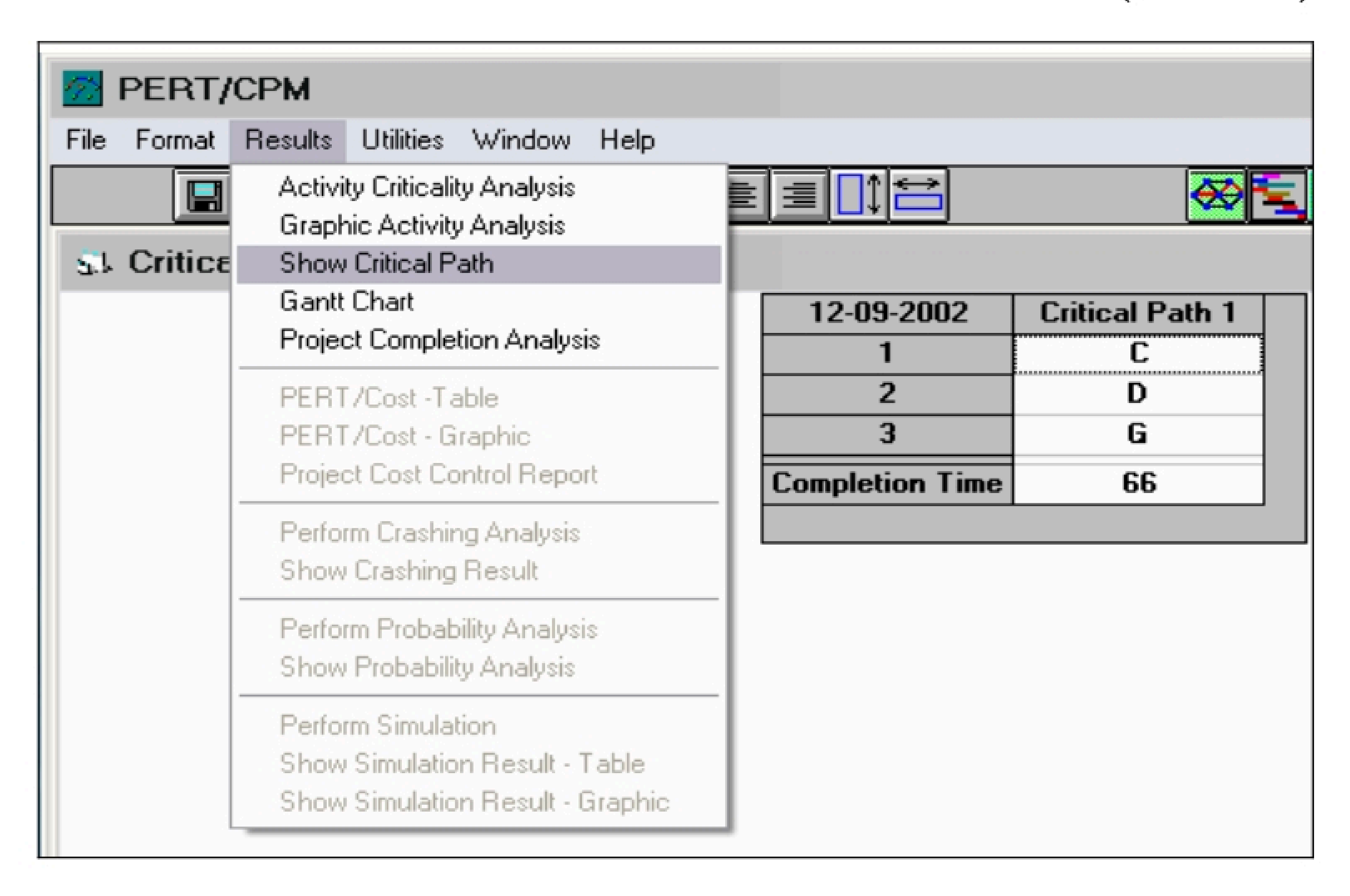
كذلك يمكن الاطلاع على نتائج الحل السابق على خارطة بيرت (PERT) التالية:



وكذلك يمكن الاطلاع على الرسم الخاص بالوقت المبكر والوقت المتأخر لكل نشاط من الأنشطة السابقة كما في الشكل التالي:

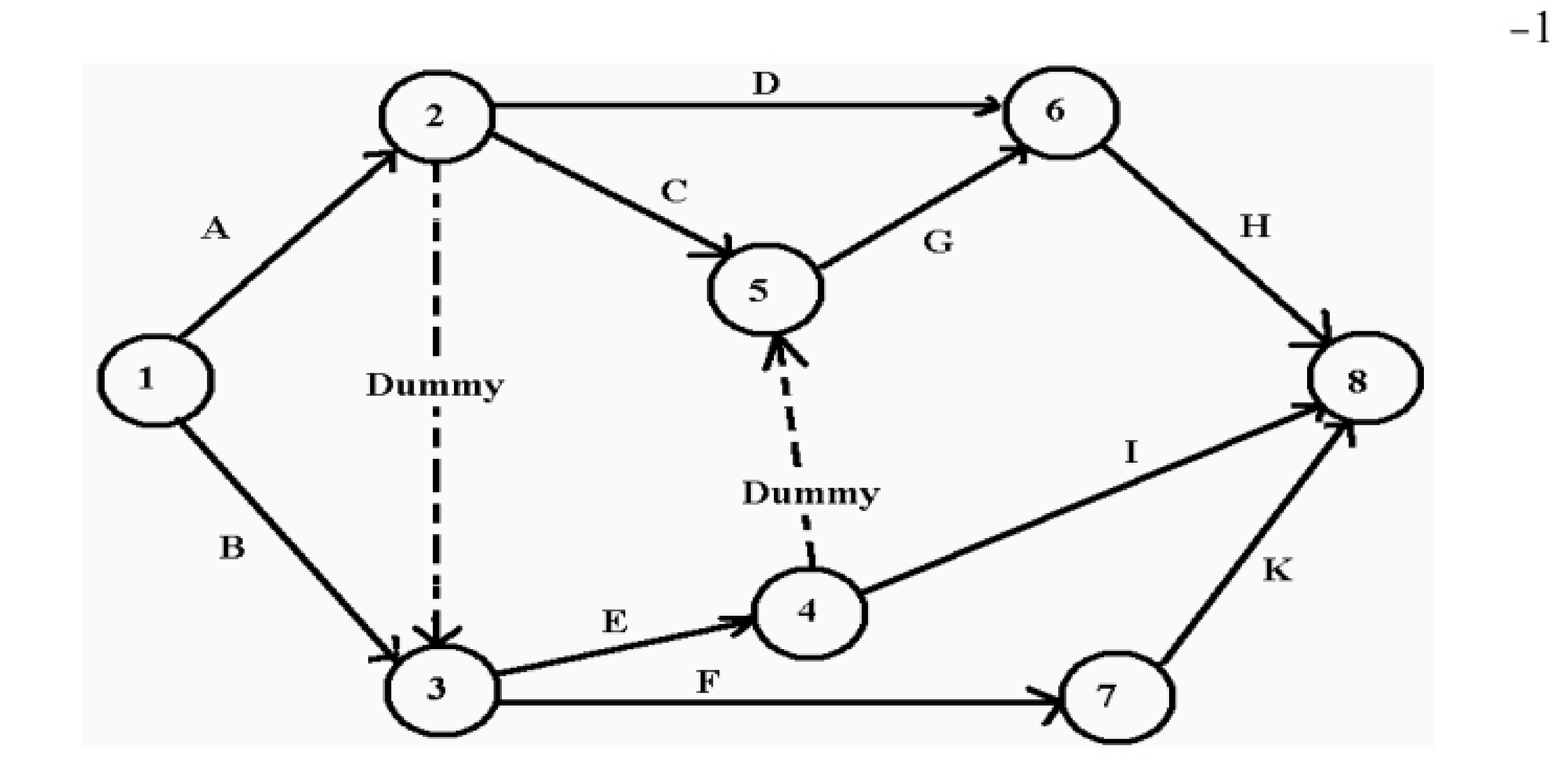


كذلك يمكن الحـصول عـلى العديـد مـن النتـائج المهمـة الأخـرى باسـتخدام البرنامج مثل الحصول عـلى جـدول تكـاليف مـشكلة بـيرت (PERT) ورسـم شـبكة التكاليف لمشكلة بيرت (PERT) وتحليل الاحتمالات (Probabilities) وكذلك المحاكاة (Simulation).

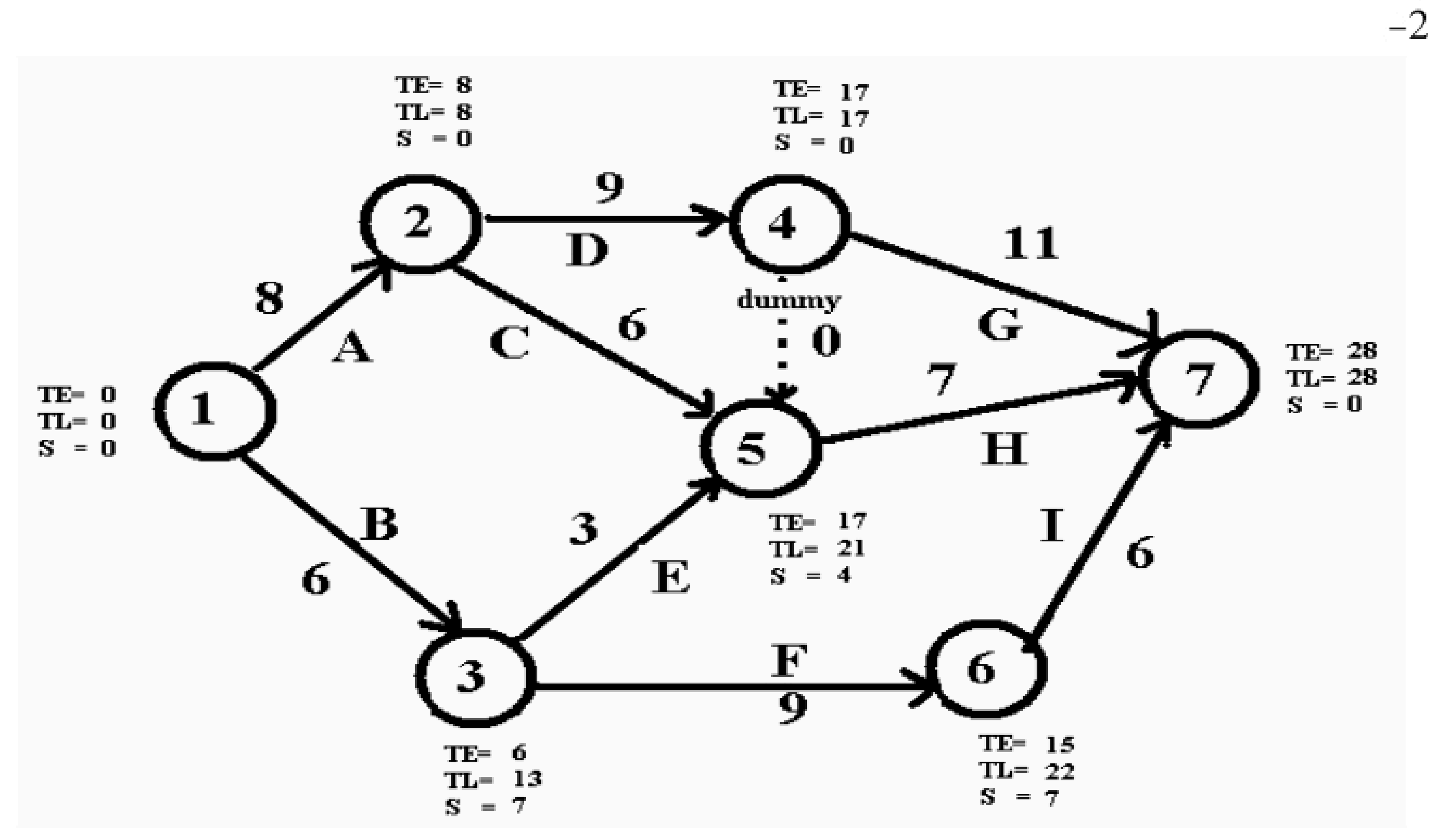


حلول مسائل تقييم البرامج ومراجعتها وطريقة المسار الحرج CPM

-1



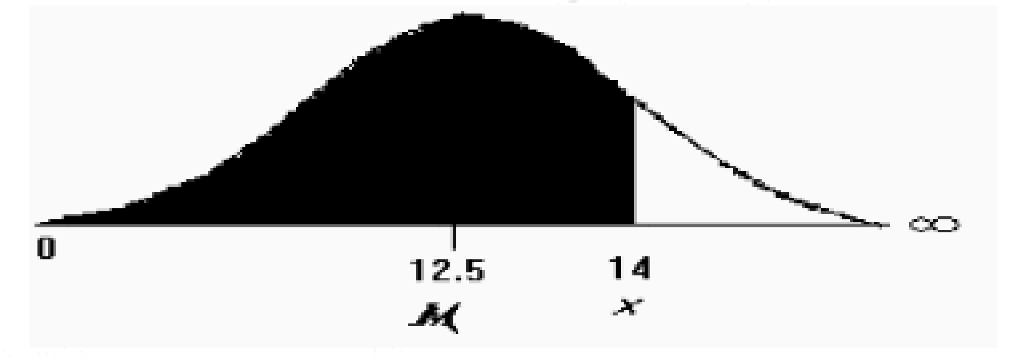
-2



المسار الحرج هو A، D، G

-3

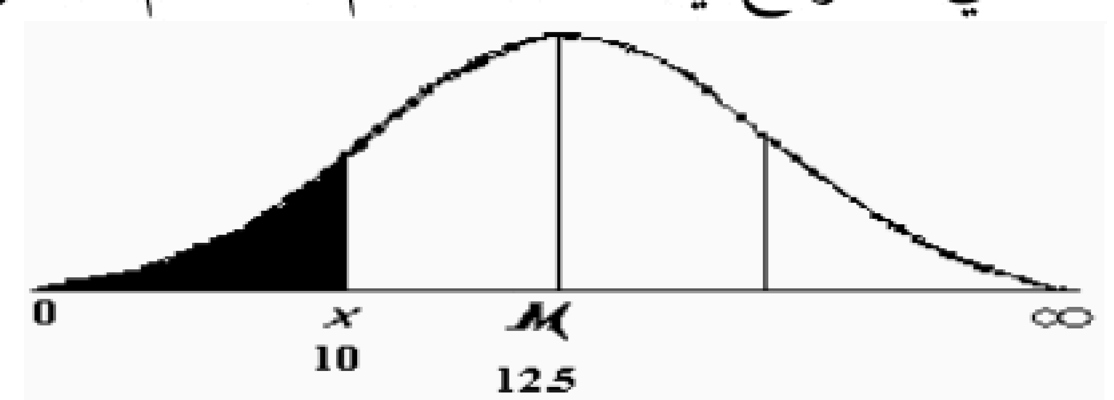
أ) حساب احتمال أن ينتهي المشروع في خلال 14 يوماً (14 يوم أو اقل)؟



$Z= \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{14-12.5}{\sqrt{1.96}} = \frac{1.5}{1.4} = 1.07$ ومن الجدول $= 0.3577$

$P(x \le 14) = 0.5+0.3577 = 0.8577$

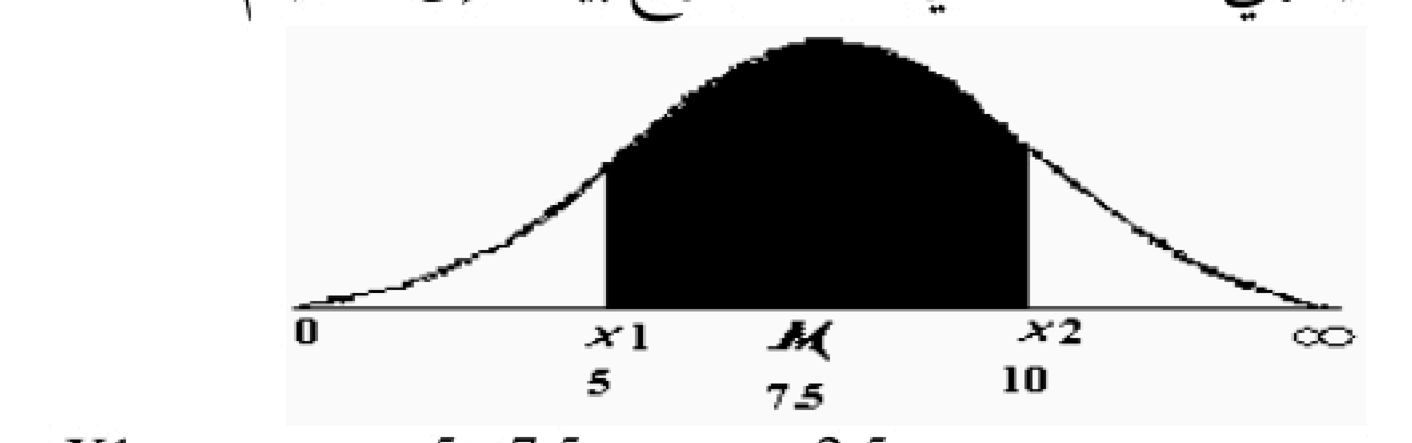
ب) احتمال أن ينتهي المشروع في خلال 10 أيام (10 أيام أو اقل) ؟



$Z= \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{10-12.5}{\sqrt{1.96}} = \frac{2.5}{1.4} = -1.79$ ومن الجدول $= 0.4833$

$P(x \le 10) = 0.5 - 0.4833 = 0.017$

ج) احتمال أن ينتهي النشاط D في مدة تتراوح بين 5 إلى 10 أيام؟



$Z1= \frac{X1-\mu}{\sigma} = \frac{5 - 7.5}{\sqrt{0.8}} = \frac{-2.5}{0.894} = -2.80$ ومن الجدول $= 0.4974$

$Z2= \frac{-\mu\ 2X}{\sigma} = \frac{-\ 7.510}{\sqrt{0.8}} = \frac{2.5}{0.894} = 2.80$ ومن الجدول $= 0.4974$

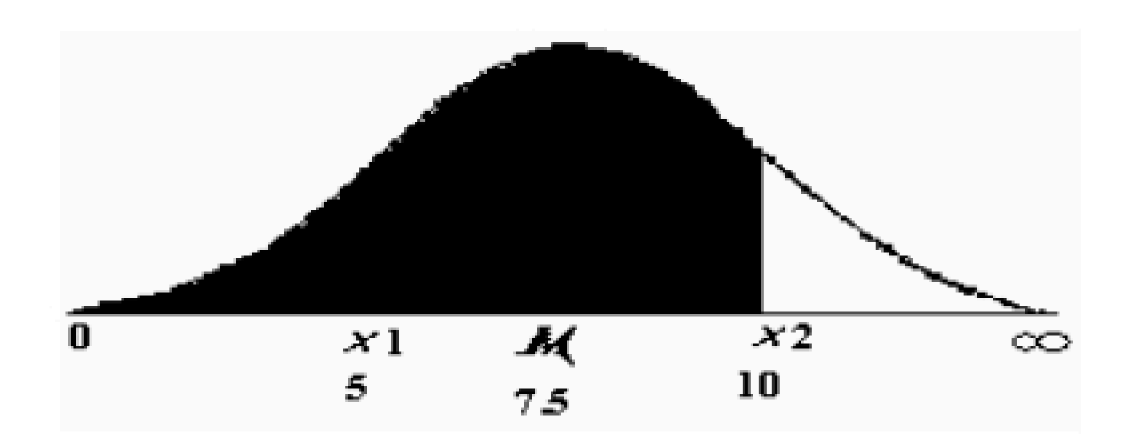
$P(5 \le x \le 1) = 0.4974 + 0.4974 = 0.99$

د) احتمال أن ينتهي النشاط D في خلال 10 أيام؟

الاحتمال هو :

$Z= \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{10 - 7.5}{\sqrt{0.8}} = \frac{2.5}{0.894} = 2.80$ ومن الجدول $= 0.4974$

$P(x \leq 10) = 0.5 + 0.4974 = 0.9974$

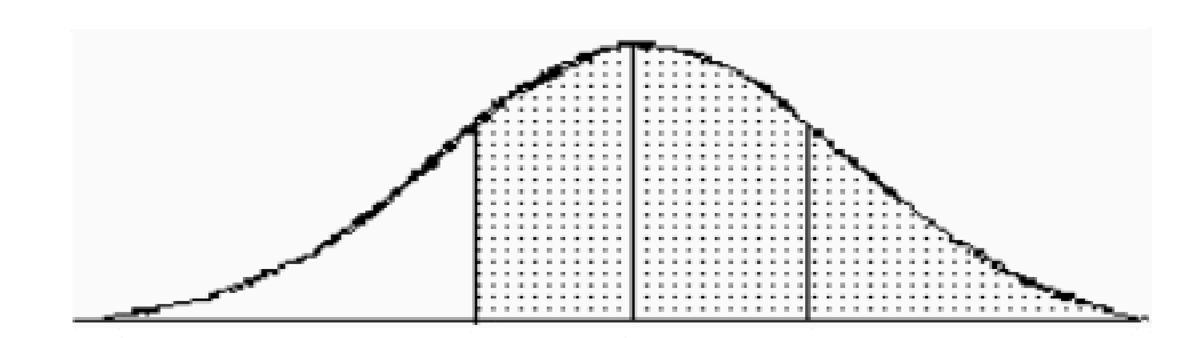


-4

أ) حساب احتمال أن ينتهي المشروع في فترة لا تقل عن 46 يوم؟

$Z= \frac{x - \mu}{\sigma}$

$Z= \frac{46-66}{36} = -.3.33$



من الجدول p=0.499

الاحتمال =0.5+0.499=0.999

ب) حساب احتمال أن ينتهي المشروع في فترة لا تزيد عن 86 يوم؟

$Z= \frac{x - \mu}{\sigma}$

$Z= \frac{86-66}{36} = +.3.33$

من الجدول p=0.499

الاحتمال =0.5+0.499=0.999



جـ) حساب احتمال أن يبدأ النشاط G في فترة لا تزيد عن 40 يوماً؟

$$Z= \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$Z= \frac{30-40}{20} = + 2.24$$

من الجدول p=0.487

الاحتمال =0.5+0.487=0.987



د) حساب احتمال أن يبدأ النشاط G في فترة تتراوح بين 30 إلى 50 يوماً؟

$$Z= \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$Z1= \frac{30-50}{20} = + 4.47$$



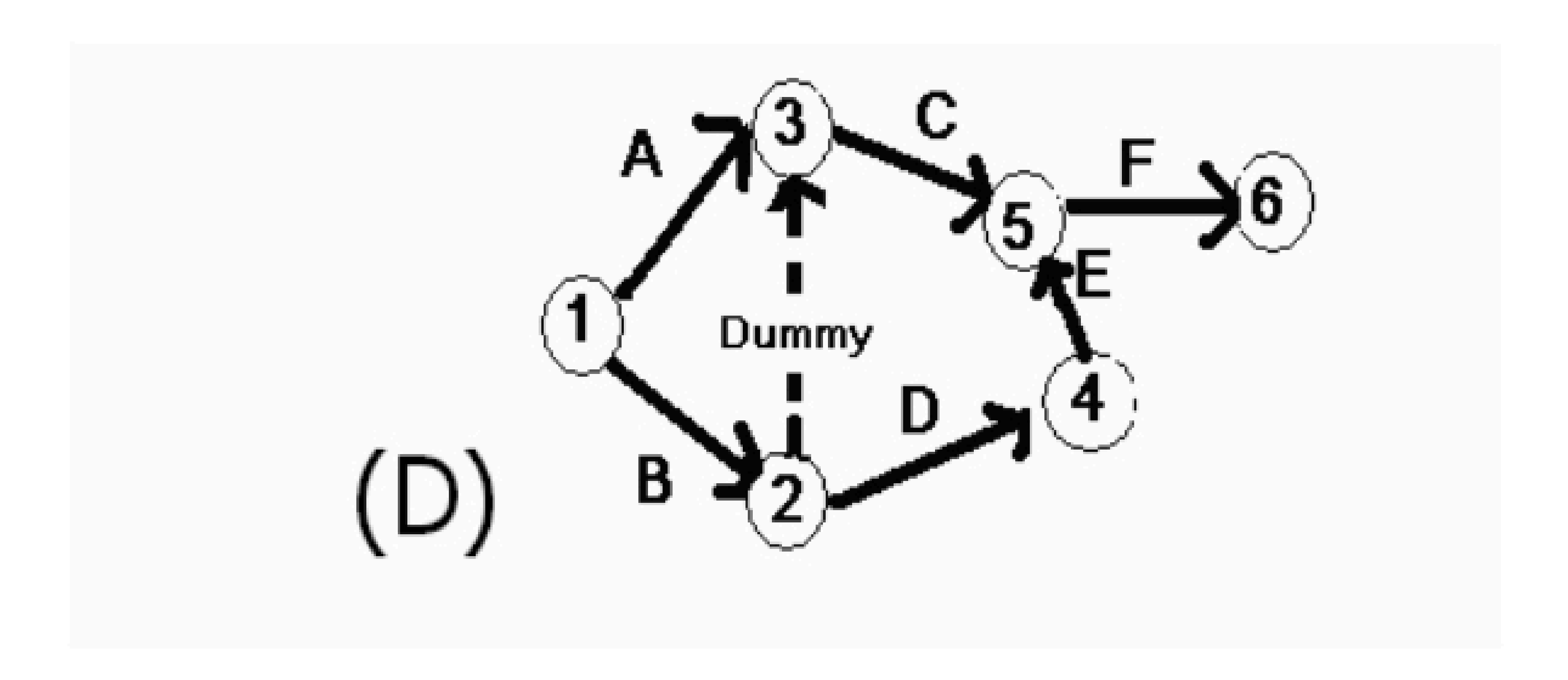
$$Z= \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$Z2= \frac{30-30}{20} =0$$

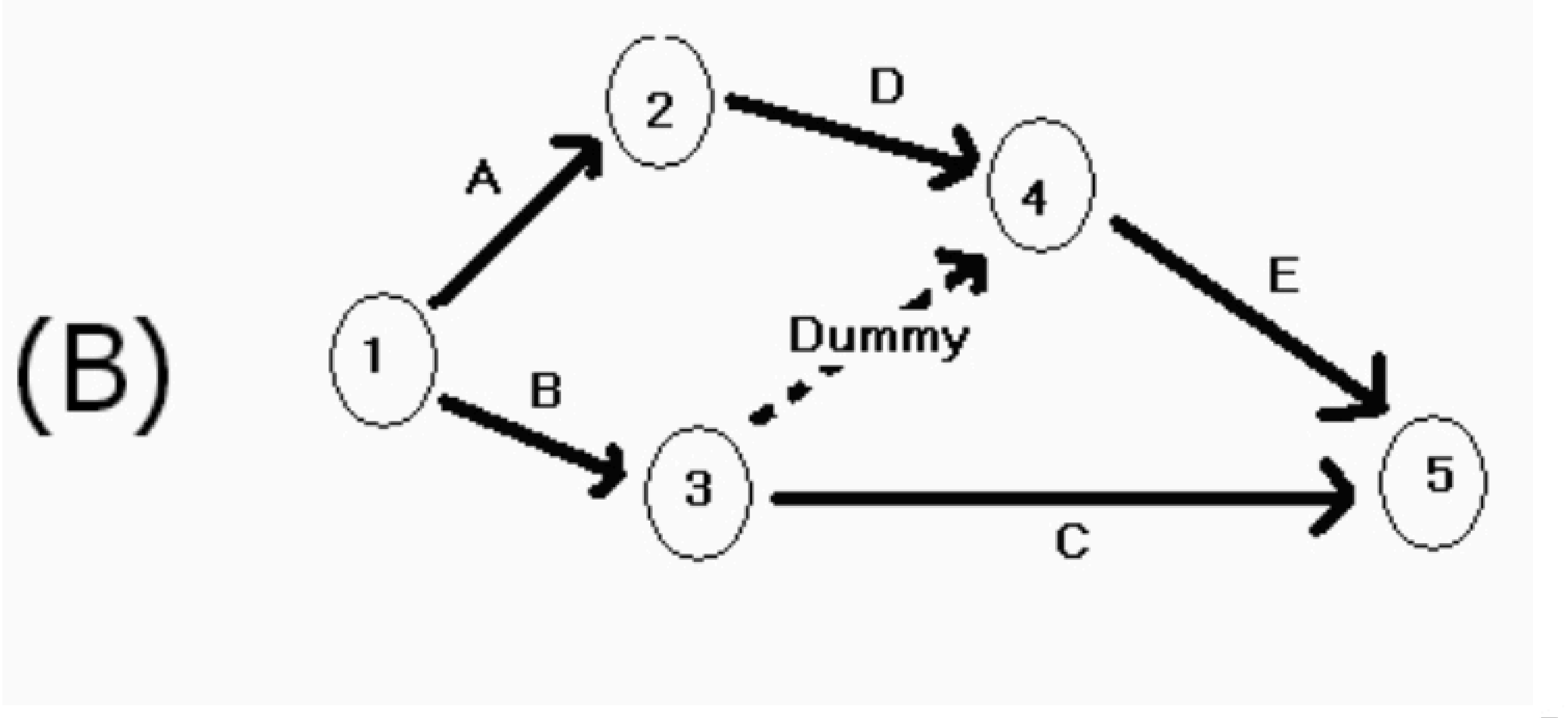
من الجدول p=0.499

الاحتمال =0+0.499= 0.5

-5



-6

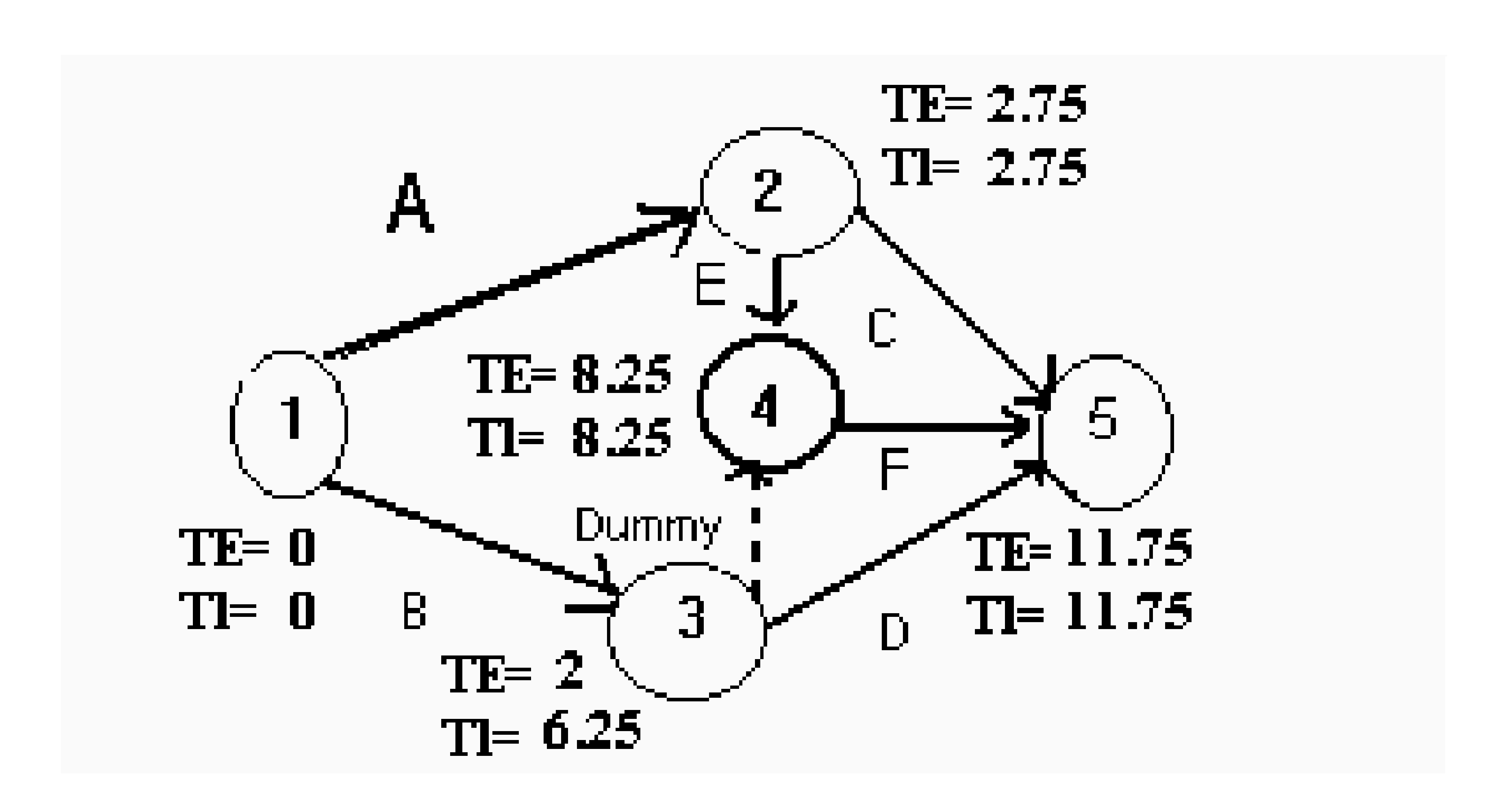


-7

b) A,Dummy,E

8-

النشاط	الفترات المتوقعة			te	σ2	TE	TL
	المتفائل (a)	الأكثر احتمالا (m)	المتشائم (b)				
A	1	3	3.5	2.75	0.17	2.75	2.75
B	0.5	2	3.5	2	0.25	2	6.25
C	3	4	8	4.5	0.69	7.25	11.75
D	3	5	10	5.5	1.36	7.5	11.75
E	4	5	9	5.5	0.69	8.25	8.25
F	3	.53	4	3.5	0.027	11.75	11.75



أ) المسار الحرج A,E,F

ب) حساب احتمال أن ينتهي المشروع في فترة تتراوح بين 10 إلى 15 أسبوعا؟

$$Z1=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{10-11.75}{\sqrt{0.887}}=\frac{.751}{0.942}=-1.86$$ من الجدول $= 0.4686$

$$Z2=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{15-11.75}{\sqrt{0.887}}=\frac{3.25}{0.942}=3.45$$ من الجدول $= 0.4999$

$P(10 \leq x \leq 5)= 0.4686+0.4999 = 0.9686$

ج) احتمال أن ينتهي المشروع في فترة لا تقل عن 14 أسبوع (أي 14 أسبوعا أو أكثر)؟

$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{14-11.75}{\sqrt{0.887}}=\frac{.252}{0.942}=.382$$ من الجدول $= 0.4916$

$P(14 \leq x) =0.5- 0.4916=0.0084$

احتمال أن ينتهي المشروع خلال 11 يوم

$.5-0.2880=.220$

د) احتمال أن يبدأ النشاط d في مدة لا تزيد عن 3 أسابيع؟

$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{3-2}{0.125}=\infty \quad =0.4999 \quad +0.5 \quad = 0.9999$$

المراجع

أولاً: المراجع العربية

1- المنصور، كاسر نصر، *نظرية القرارات التجارية (مفاهيم وطرق كمية)*، الأردن، دار الحامد 2000 م.

2- مشرفي، حسن علي، *نظرية القرارات الإدارية(مدخل كمـي في الإدارة)*، عـمّان، دار المسيرة للنشر والتوزيع. 1997م.

3- سلطان، تركي إبراهيم، *التحليلات الكمية في اتخـاذ القـرارات*، الريـاض، جامعـة الملك سعود. 1984م

4- مخلوف، إبراهيم، *التحليل الكمي في الإدارة*(2)، مذكرة، قسم الأسـاليب الكميـة، جامعة الملك سعود.1998

5- البديوي، منصور، *دراسات في الأساليب الكمية واتخاذ القرارات*. (الـدار العربيـة 1987م).

6- برونـسون، ريتـشارد، *نظريـات ومـسائل في بحـوث العمليـات*. نيويـورك: دار ماكروهيل للنشر ؛ القاهرة: الدار الدولية للنشر والتوزيع، 1988.

ثانياً: المراجع الأجنبية

1. Operation Research, Application and Algorithms, Wayne L. Winston, Indiana University, 4th Edition, 2004.
2. Applied Management Science: A Computer-Integrated Approach for Decision Making: John A., Jr. Lawrence, Barry Alan Pasternak, 1997
3. Introduction to Operations Research, Hamdy A. Taha, eighth edition, April 4, 2006.
4. Introduction to mathematical programming, Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman. 2 edition, April 1, 1995
5. Production and Operations Analysis, Second Edition, Steven Nahmais, Santa Clara University, IRWIN, March 3, 2008
6. Introduction to Mathematical Programming, by N. K. Kwak, Saint Louis University, Marc J. Schniederjurs university of Nebraska, Robert E.Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1987
7. Quantitative Methods for Business Decision with Case. San Jose. State University, The Dryden Press, Sixth Edition, 1994
8. Operation Research Principles and Practice, Second Edition, Ravindran Phillips Solberg, July 2007
9. Quantitative Decision-Making for Business, Prentice, Hall International editions, Gilbert Gordon, Israel Pressman. Third edition, 1990
10. Linear Programming and Network Flows, Second Edition, Makhtar s. Bazaraa, John J. Jarvis, and Hanif D. Sherali, November 2008

ثبت المصطلحات

أولاً: عربي – إنجليزي

أ

أجزاء الحاسب الآلي	Hardware
الإجمالي	Totals
اختيار المعدات	Equipment Selection
الأساليب الكمية	Quantitative Methods
الأسس	Powers Or Exponentiation
أسعار الظل	Shadow Prices
أسلوب تقييم البرامج ومراجعتها	Program Evaluation And Review Technique PERT
إضافة الفوائض	Slacks
الأعمال	Jobs
أمثلية الإنتاج	Optimized Production
الأنشطة السابقة	Predecessor Activities
الأنشطة الوهمية	Dummy Activities

الأنظمة	Systems
الأنظمة الاحتمالية	Stochastic
أنظمة التحليل	Reasoning
أنظمة الخبراء	Expert Systems
الأنظمة الصناعية المرنة	FMS Flexible Manufacturing Systems
أنظمة القرارات المساعدة	Decision Support Systems أو DSS
أنظمة اللغة الطبيعية	Natural Language Systems
أوقات إتمام النشاط	Ctivity Completion Times
الأوقات الفاصلة	Interarrival Times
أوقات وقوع الحدث	Event Occurrence Times
الأول في الوصول الأول في الخدمة	First Come First Served أو FCFS

ب

برمجة الأعداد الصحيحة أو غير الكسرية	Integer Programming
البرمجة البرامترية	Parametric Programming
البرمجة الخطية	Linear Programming
البرمجة الديناميكية	Dynamic Programming
البرمجة الرياضية	Mathematical Programming
برمجة الهدف	Goal Programming
البرمجة غير الخطية	Nonlinear Programming
برمجة متعددة الأهداف	Malti Objectives
البرمجة من الدرجة الثانية	Quadratic Programming

برنامج أولي	Primal

ت

تحديد أعظم زاوية جذابة	Most Attractive Corner
التحكم الآلي	Robots Control
التحلل	Degeneracy
تحليل الحساسية	Sensitivity Analysis
تحليل الشبكات	Network Analysis
التحليل الكمي	Quantitative Analysis
تخطيط الخدمات	Facility Planning
التطابقية أو الثنائية	Duality
تطبيقات الكمبيوتر في التصميم	CAD او Computer Aided Design
تطبيقات الكمبيوتر في الصناعة أو التطبيقات الصناعية بواسطة الكمبيوتر	Computer –Aided Manufacturing
تعظيم	Maximization
التفاضل	Differentiation
التقدير الأكثر احتمالا	Most Likely Estimate
التقدير المتشائم	Pessimistic Estimate

التقدير المتفائل	Optimistic Estimate
تقنية الذكاء الاصطناعي	Artificial Intelligence
تقنية المجموعات	Group Technology Gt
تقنية المرونة	Flexibility
تقنية أمثلية الإنتاج	Optimized Production Technology OPT
التكامل	Integration
تكلفة النقل	Shipping Cost
التوزيع الآسي	Exponential Distribution
التوزيع الذكي ونظام المعلومات	Intelligent Scheduling And Information System
توزيع العمل على الأجهزة أو العمال	Plant Scheduling
التوزيع المنحرف	Skewed Distribution
توزيع ذو خاصية عدم التذكر	Memoryless Distribution

ث

الثابت	Constant

ج

جدول ا لسمبلكس ا لابتدائي	Initial Simplex Tableau
جدول التوزيع الطبيعي ا لمعياري التجميعي	Cumulative Standard Normal Distribution
جدول النقل	Transportation Tableau
جدولة الأوقات	Schedule Times
جودة	Quailty

ح

حالة	State
حجم الصف	Capacity Of Queue
الحلول الممكنة	Feasible Solution
حلول متعددة مثلى	Multiple Optimal Solutions

خ

الخاص بالبرمجة	Programming Languages
خطوات طريقة النقل	Transportation Algorithm
خوارزمية دجكسترا	Dijkstra's Algorithm

د

دالة الهدف	Objective Function
دالة تصغيرية	Minimization

ر

ربحية الوحدة الواحدة	Unit Profit

س

ساعة توقيت	Clock Time
السلسلة	Chain

ص

صف المحور	Pivot Row
الصنع في وقته	Just-in-Time
صياغة القيود	Constraints
صياغة المشكلة رياضيا	Formulation

ط

طريقة أقل تكلفة	Minimum Cost Technique
طريقة التفرع	Branch – And – Bond Methods
طريقة التوزيع المعدلة	Modi Modified Distribution Methods
طريقة الحل البياني	Simplex Methods
طريقة الركن الشمالي الغربي	Critical Path Method CPM
طريقة السمبلكس	Simplex Methods
طريقة المسار الحرج	Critical Path Method (CPM)
طريقة قومري	Gemory Methods
طريقة هانغاريان	Hungarian Method
الطلب	Demands

ع

عدد نقاط الخدمة	Number Of Services
عدد وصول الزبائن	Arrivals
العرض	Supplies
علم الإحصاء	Statistics
علم الإدارة	Management Science
علم القرار	Decision Science
علم بحوث العمليات	Operations Research
عملية الخدمة	Service Process
عملية الوصول	Arrival Process
عمود المحور	Pivot Column

ف

فارغ	Idle
فترة المشروع	Project Duration

ق

القوانين المعلنة	Declarative Rule

قيد عدم السلبية	Non Negative Constraints

ك

كسب الوحدة الواحدة	Improvement Row
الكمية المنقولة	Shipping Allocation

ل

لانهائي	Infinite
اللوغاريتمات	Logarithm

م

مؤقتة	Temporary
ماكينة الاستدلال	Inference Engine
متعدد الأهداف	Multiple Objectives
متعددة الأهداف	Multi-Objective
متغير فائض	Slack Variable
المتغيرات الحرة القيمة	Variable Mix
المتغيرات الزائدة	Surplus Variables
المتغيرات الصناعية	Artificial Variables
المتغيرات الفائضة	Slack Variables
المتغيرات غير الداخلة في الحل	Nonmix Variables
مجال الحل الممكن	Feasible Solution
المحاكاة	Simulation

المحددات	Determinates
محددة	Deterministic
المدة	Duration
مدة الخدمة لكل زبون	Service Time
المدة المتوقعة	Expected Duration
مراكز التوزيع	Destinations
المسار الحرج (CPM)	Critical Path
المسارات أو الطرق	Paths
مشاكل الطريق الأقصر	Shortest Path Problems
المشاكل ذوات القيمتين	Zero-One-Problems
المشاكل غير المقيدة	Unbound Feasible Solutions
مشروط أو مقيد بـ	Subject To
مشكلة البرمجة الصحيحة الصافية	Pure Integer Programming Problem
مشكلة البرمجة الصحيحة المختلطة	Mixed Integer Programming Problem
مشكلة التعيين أو التخصيص	Assignment Problem
المشكلة المرافقة	Dual Problem
مشكلة النقل	Transportation Problem

مشكلة حقيبة الظهر	Knapsack Problem
المصادر	Sources
المصفوفات	Matrixes
معادلة التراجع	Recursive Equation
معادلةقس جوردن	Gauss Jordan
معامل التغيير	Exchange Coefficient
معدل التغيير	Exchange Ratio
معدل الوصول	Arrival Rate
معدل أو متوسط الأوقات الفاصلة	Interarrival Rate

ن

نتائج الحل	Solution Values
النشاط	Activity
نظام الخدمة	Service Discipline
نظام كان بان	Kan Ban System
نظام متصل	Continues System
نظام متقطع	Discrete System
نظرية الانتظار(الصفوف	Queuing Theory
نظرية النزعة المركزية	Central Limit Theory
نظم الصناعة المرنة	Flexible Manufacturing System
نظم القرارات المساند	Decision Support System
نظم المعلومات الإدارية	MIS Management Information System

نقاط وهمية	Dummy Points
نقطة عرض وهمي	Dummy Supply Point
نماذج الشبكات	Network Models
نماذج الصفوف	Queuing Models
نماذج المحاكاة المتقطعة	Discrete Event Simulation
نماذج المخزون	Inventory Models
نموذج محاكاة ثابت	Static Simulation Model
نموذج محاكاة ديناميكي	Dynamic Simulation Model
نموذج مونتي كارلو	Monte Carlo Simulation
نهائي	Permanent
النهايات	Limits

و

واجهة المستخدم	User Interface
الوقت المبكر المتوقع	Earliest Expected Time
الوقت المبكر المتوقع للانتهاء	Earliest Expected Completion Time TE
الوقت المتأخر المسموح به	Latest Allowable Time
الوقت المتوقع للانتهاء	Expected Time Of Completion

ثانياً: إنجليزي - عربي

A

Activity	النشاط
Activity Completion Times	أوقات إتمام النشاط
Arrival Process	عملية الوصول
Arrival Rate	معدل الوصول
Arrivals	عدد الزبائن
Artificial Intelligence	الذكاء الاصطناعي
Artificial Variables	المتغيرات الاصطناعية
Assignment Problem	مشكلة التعيين أو التخصيص

B

Branch – And – Bound Methods	باستخدام طريقة التفرع

C

CAD او Computer Aided Design	التعليم بمساعدة الحاسب
Capacity Of Queue	حجم الصف
Central Limit Theory	نظرية النزعة المركزية
Chain	السلسلة
Clock Time	ساعة توقيت
Computer –Aided Manufacturing	التصنيع بمساعدة الحاسب
Constant	الثابت

Constraints	صياغة القيود
Continues System	نظام متصل
Critical Path	المسار الحرج
Critical Path Method CPM	طريقة المسار الحرج
Cumulative Normal Distribution Standard	جدول ا لتوزيع الطبيعي ا لمعيار ي التجميعي

D

Decision Science	علم القرار
Decision Support Systems(DSS)	نظم دعم اتخاذ القرار
Declarative Rule	القوانين المعلنة
Degeneracy	التحلل
Demands	الطلب
Destinations	مراكز التوزيع
Determinates	المحددات
Deterministic	محددة
Differentiation	التفاضل
Dijkstra's Algorithm	خوارزمية دجكسترا
Discrete Event Simulation	نماذج المحاكاة المتقطعة

Discrete System	نظام متقطع
Dual Problem	المشكلة المرافقة
Duality	التطابقية أوالثنائية
Dummy Activities	الأنشطة الوهمية
Dummy Points	نقاط وهمية
Dummy Supply Point	عرض وهمي
Duration	المدة
Dynamic Programming	البرمجة الديناميكية
Dynamic Simulation Model	نموذج محاكاة ديناميكي

E

Earliest Expected Completion Time TE	الوقت المبكر المتوقع للانتهاء
Equipment Selection	اختيار الأدوات
Event Occurrence Times	أوقات وقوع الحدث
Exchange Coefficient	معامل التغيير
Exchange Ratio	معدل التغيير
Expected Duration	المدة المتوقعة
Expected Time Of Completion	الوقت المتوقع للانتهاء
Expert Systems	أنظمة الخبراء
Exponential Distribution	التوزيع الآسي

F

Facility Planning	تخطيط الخدمات
Feasible Solution	مجال الحل الممكن
First Come First Served أو FCFS	الأول في الوصول الأول في الخدمة
Flexibility	تقنية المرونة
Flexible Manufacturing System	نظم الصناعة المرنة
Fms Flexible Manufacturing Systems	الأنظمة الصناعية المرنة
Formulation	صياغة المشكلة رياضيا

G

Gauss Jordan	معادلة قس جوردن
Gemory Methods	طريقة قومري
Goal Programming	برمجة الهدف
Graphical Solution Methods	طريقة الحل البياني
Group Technology GT	تقنية المجموعات

H

Hardware	أجزاء الحاسب الآلي
Hungarian Method	طريقة هانغاريان

I

Idle	فارغ
Improvement Row	كسب الوحدة الواحدة
Infeasible	غير ممكن
Inference Engine	ماكينة الاستدلال
Infinite	لانهائي
Initial Simplex Tableau	جدول ا لسمبلكس الابتدائي
Integer Programming	برمجة الأعداد الصحيحة أوغير الكسرية
Integration	التكامل
Intelligent Scheduling And Information System	التوزيع الذكي ونظام المعلومات
Interarrival Rate	معدل الوصول الفاصل
Interarrival Times	الأوقات الفاصلة
Inventory Models	نماذج المخزون

J

Jobs	الأعمال
Just-in-Time	طريقة لا مخزون، إحضار المواد أثناء الصنع فقط

K

Kan Ban System	نظام كان بان
Knapsack Problem	مشكلة حقيبة الظهر

L

Latest Allowable Time	الوقت المتأخر المسموح به
Limits	النهايات
Linear Programming	البرمجة الخطية
Logarithm	اللوغاريتمات

M

Malti Objectives	برمجة متعددة الأهداف
Management Science	علم الإدارة
Mathematical Programming	البرمجة الرياضية
Matrixes	المصفوفات
Maximization	تعظيم
Memoryless Distribution	توزيع ذو خاصية عدم التذكر
Minimization	دالة تصغيرية
Minimum Cost Technique	طريقة أقل تكلفة
MIS Management Information System	نظم المعلومات الإدارية
Mixed Integer Programming Problem	مشكلة البرمجة الصحيحة المختلطة
Modi Modified Distribution Methods	طريقة التوزيع المعدلة

Monte Carlo Simulation	نموذج مونتي كارلو
Most Attractive Corner	تحديد أعظم زاوية جذابة
Most Likely Estimate	التقدير الأكثر احتمالا
Multi-Objective	متعدد الأهداف
Multiple Optimal Solutions	حلول متعددة مثلى

N

Natural Language Systems	أنظمة اللغة الطبيعية
Network Analysis	تحليل الشبكات
Network Models	نماذج الشبكات
Non Negative Constraints	قيد عدم السلبية
Nonlinear Programming	البرمجة غير الخطية
Nonmix Variables	المتغيرات غير الداخلة في الحل
Northwest Corner Technique	طريقة الركن الشمالي الغربي

O

Objective Function	دالة الهدف
Operations Research	علم بحوث العمليات
Optimistic Estimate	التقدير المتفائل
Optimized Production	أمثلية الإنتاج
Optimized Production Technology OPT	تقنية أمثلية الإنتاج

P

Parametric Programming	البرمجة البرامترية
Paths	المسارات أو الطرق
Permanent	نهائي
Pessimistic Estimate	التقدير المتشائم
Pivot Column	عمود المحور
Pivot Row	صف المحور
Plant Scheduling	توزيع العمل على المكائن أو العمال
Powers Or Exponentiation	الأسس
Predecessor Activities	الأنشطة السابقة
Primal	برنامج أولي
Program Evaluation And Review Technique PERT	أسلوب تقييم البرامج ومراجعتها
Programming Languages	لغات البرمجة
Project Duration	فترة المشروع
Pure Integer Programming Problem	مشكلة البرمجة الصحيحة الصافية

Q

Quadratic Programming	البرمجة من الدرجة الثانية

Quality	جودة
Quantitative Analysis	التحليل الكمي
Quantitative Methods	الأساليب الكمية
Queuing Models	نماذج الصفوف
Queuing Theory	نظرية الانتظار(الصفوف

R

Reasoning	أنظمة التحليل
Recursive Equation	معادلة التراجع
Robots Control	التحكم الآلي

S

Schedule Times	جدولة الأوقات
Sensitivity Analysis	تحليل الحساسية
Service Discipline	نظام الخدمة
Service Process	عملية الخدمة
Service Time	مدة الخدمة لكل زبون
Services , Number Of	عدد نقاط الخدمة
Shadow Prices	أسعار الظل
Shipping Allocation	الكمية المنقولة
Shipping Cost	تكلفة النقل
Shortest Path Problems	مشاكل الطريق الأقصر
Simplex Methods	طريقة السمبلكس

Simulation	المحاكاة
Skewed Distribution	التوزيع المنحرف
Slack Variable	متغير فائض
Slacks	إضافة الفوائض
Solution Values	نتائج الحل
Sources	المصادر
State	حالة
Static Simulation Model	نموذج محاكاة ثابت
Statistics	علم الإحصاء
Stochastic	الأنظمة الاحتمالية
Subject To	مشروط أو مقيد بـ
Supplies	العرض
Surplus Variables	المتغيرات الزائدة
Systems	الأنظمة

T

Temporary	مؤقتة
Totals	الإجمالي

مشكلة النقل	Transportation Problem
خطوات طريقة النقل	Transportation Algorithm
جدول النقل	Transportation Tableau

U

غير متوازنة	Unbalanced
المشاكل غير المقيدة	Unbound Feasible Solutions
ربحية الوحدة الواحدة	Unit Profit
التفاعل مع المستخدم	User Interface

V

المتغيرات الحرة القيمة	Variable Mix

Z

المشاكل ذوات القيمتين	Zero-One-Problems

كشاف الموضوعات

ج

ح

خ

د

ر

ص

ط

ع

ف

ق